Solució de l'examen parcial d'Anàlisi Matemàtica 3 27.10.09

1. Donat el conjunt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1,\ y^2 \leq x+1\}$,

a) Representeu-lo gràficament.

b) Calculeu la seva frontera, la seva adherència i el seu interior.

c) Dieu raonadament si és obert, tancat o compacte.

Solució: a) $x^2 - y^2 = 1$ és una hipèrbola amb eixos $y = \pm x$. $y^2 = x+1$ és una paràbola amb la part interior cap a l'eix y positiu. Si fem la intersecció d'ambdues corbes obtenim els punts $(-1,0)$, $(2, \pm\sqrt{3})$. La regió té forma de mitja lluna amb els vèrtexs situats als punts $(2, \pm\sqrt{3})$, limitada pel costat esquerre per la paràbola i pel dret per la hipèrbola, incloent ambdues.

b) La frontera consta d'un segment de la paràbola més un segment de la hiperbola :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 - 1, -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sqrt{y^2+1}, -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\}.$$

c) Com que el domini conté tots els punts de la frontera (conté el segment d'hipèrbola i el segment de paràbola) es tanca però no és obert. També és acotat, doncs es pot veure que $0 \leq x \leq 2$ i $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. Al ser tancat i acotat és compacte.

2. Donada la funció $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{e^{y-x} - 1}$, estudieu la continuïtat de f en el seu domini. Esbrineu si es pot estendre f a tot el pla de manera contínua.

Solució: El domini de f és $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$, tot el pla menys la recta $y = x$. La funció f és contínua en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ perquè s'obté com a suma, producte composició i quocient (quan el denominador no s'anul.la) de funcions contínues.

El problema d'estendre f a tot el pla es redueix doncs a estendre f a la recta $y = x$. Els punts d'aqueta recta són de la forma (a,a). Fixem un d'aquest punts (a,a). Es podrà estendre de manera contínua al put (a,a) si i només si la funció té límit en (a,a). Anem doncs a veure si existeix

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{y^2 - x^2}{e^{y-x} - 1}.$$

Substituint $x = a, y = a$ en l'expressió de f obtenim la indeterminació $\dfrac{0}{0}$. Llavors, usant infinitèssims ($e^{y-x} - 1$ és equivalent a $y - x$):

$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{y^2-x^2}{e^{y-x}-1} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{y^2-x^2}{y-x} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} x + y = 2a.$

Així doncs, la funció es pot estendre de manera contínua a tot el pla posant $f(a,a) = 2a$.

3. Busqueu una funció diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (y-1)e^{xy-x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy-x} - e^y$. Quantes n'hi ha? N'hi ha alguna amb $f(0,1) = 0$?

Solució: De $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (y-1)e^{xy-x}$, integrant respecte a x, obtenim que $f = e^{xy-x} + g(y)$, on $g(y)$ representa la constant d'integració. Derivant aquesta expressió respecte y i igualant a la parcial respecte y que ens han donat obtenim:

$$xe^{xy-x} + g'(y) = xe^{xy-x} - e^y,$$

d'on $g'(y) = -e^y$ i per tant $g(y) = -e^y + C$, on ara C és realment constant. Així queda que f ha de tenir la forma:

$$e^{xy-x} - e^y + C.$$

Qualssevol funció amb la forma anterior (C qualsevol) és una funció $\mathcal{C}^1$ i per tant diferenciable a $\mathbb{R}^2$. Hi ha doncs una familia infinita de solucions depenent d'un paràmetre C.

Al imposar $f(0,1) = 0$ ens queda $1 - e + C = 0$ i per tant $C = e - 1$. Així $f(x,y) = e^{xy-x} - e^y + e - 1$ és única solució amb $f(0,1) = 0$.

4. Calculeu el gradient de f en el punt (a,b) sabent que f és una funció de dues variables reals, diferenciable en (a,b), i que les derivades direccionals de f en aquest punt i en les direccions $u = (3/5, 4/5)$ i $v = (5/13, 12/13)$ són

$$D_u f(a,b) = -1/5, \quad D_v f(a,b) = -7/13.$$

Quina és la direcció de màxim creixement de f en el punt? En quina té creixement nul? Calculeu la derivada direccional de f en el punt i en la direcció del vector $(1,-3)$.

Solució: Si el gradient de f en el punt (a,b) és el vector (c,d) (en símbols $\nabla f(a,b) = (c,d)$), usant la fórmula $D_u f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot u$, obtenim que

$$(c,d) \cdot (3/5, 4/5) = -1/5 \qquad (c,d) \cdot (5/13, 12/13) = -7/13.$$

Això ens dona el següent sistema d'equacions

$$\begin{aligned} 3c + 4d &= -1 \\ 5c + 12d &= -7, \end{aligned}$$

la solució del qual és $c = 1, d = -1$. Això ens diu que

$$\nabla f(a,b) = (1,-1).$$

La direcció de màxim creixement en el punt (a,b) és la del vector $\nabla f(a,b) = (1,-1)$. Normalitzat: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Les direccions de creixement nul són les perpendiculars al gradient. N'hi ha dos: $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Si normalitzem el vector $(1,-3)$ obtenim $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)$ Usant un altre cop la fórmula $D_u f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot u$, obtenim que la derivada direccional de f en el punt i en la direcció del vector $(1,-3)$ és $(1,-1)\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3) = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.