Diplomatura d'Estadística
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

Anàlisi Matemàtica 3

SOLUCIONS LLISTA de PROBLEMES

Curs 2009–2010

Rafel Farré

Barcelona, setembre 2009

2 $\sqrt{2}$.

3 És la esfera de centre $(1,1,1)$ i radi 3.

4 a) $\mathrm{int}(A){=}A$, $\quad \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \|(x,y)\| \leq 1\}$, $\ \mathrm{Fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \|(x,y)\| = 1\}$.
A és obert.

b) $\mathrm{int}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0, xy < 1\}$, $\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \geq 0, xy \leq 1\}$,
$\mathrm{Fr}(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0, y = 0\} \cup$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y \geq 0, xy = 1\}$. B no és obert ni tancat.

c) $\mathrm{int}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x+y| < 1\}$, $\bar{C} = C$, $\mathrm{Fr}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x+y| = 1\}$.
C és tancat.

d) $\mathrm{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| < 1\}$, $\bar{D} = D$, $\mathrm{Fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| = 1\}$.
D és tancat.

5 Només C és compacte.

1 a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$. b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y>0\}$.
c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ -x\le y\le x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ x\le y\le -x\}$.
d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[2n\pi,(2n+1)\pi], y\ge 0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[(2n-1)\pi,2n\pi], y\le 0\}$.
e) $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$. f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2n\pi\le x^2+y^2\le(2n+1)\pi,\ n=0,1,2,\ldots\}$.
g) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy>-1\}$. i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|+|y|>1\}$.
j) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

4 a) 0. b) 0. c) no existeix. d) no existeix. e) no existeix. f) no existeix. g) ∞.
h) 0. i) ∞. j) no existeix.

5 Si $p+q>2$, el límit és 0. Altrament, no existeix.

6 Tots els límits direccionals són 0, però el límit no existeix.

7 0.

8 a) El punt $(0,0)$. b) El conjunt $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$.
c) El conjunt $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=y\}$. d) Els punts dels eixos de coordenades.

10 Ho és.

11 Sí. S'ha de posar $f(x,0)=x/2$.

12 a) El domini és $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\}\setminus\{(0,0)\}$ i no és compacte.
b) Només és possible fer-ho en el punt $(0,0)$ i s'ha de posar $f(0,0)=-1$.

13 $f(x)=\sin^2 x\,,\quad g(y)=\sin^2 y$.

14 b) f és contínua en K. c) $f(K)$ és compacte.

15 b) f no és contínua en $(0,0)$. Sí ho és en la resta de punts de $\mathbb{R}^2$.

1 a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - ye^{xy}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3 + xe^{xy}$. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xyz^{xy-1}$.

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\sin z$.

2 0.

3 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (\sin x)^{-1+siny}\cos x \sin y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = (\sin x)^{siny}\cos y \ln(\sin x)$.

4 a) Que no depèn de x. b) $f(x,y) = \dfrac{1}{5}\left(x^2 + 4y^2\ln|x| - 1\right) + \sin y + \tan y$.

5 a) $(-1,-2,1)$. b) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$. c) $(0,1,0)$.

6 a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1/x & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix} yz\cos(xyz) & xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$.

7 És contínua en tot $\mathbb{R}^2$. Les derivades parcials són

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(y^2-x^2+1)}{x^2+y^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^2-y^2+1)}{x^2+y^2+1)^2},$$

que existeixen i són contínues en tot $\mathbb{R}^2$, i, per tant, f és diferenciable en tot $\mathbb{R}^2$.

9 a) $2/3 - \sin(3/2) - 2\cos(3/2)$. b) $\sqrt{10}$ i $-\sqrt{10}$.

10 $(-3,-1)$ increment més gran, $(3,1)$ decreixement més gran.

11 $(-1,1)$; $\sqrt{2}$.

12 a) $\left(-6\sqrt{5} - 2\sqrt{13}, 9\sqrt{5} + 4\sqrt{13}\right)$. b) $\pm\left(9\sqrt{5} + 4\sqrt{13}, 6\sqrt{5} + 2\sqrt{13}\right)$.

13 a) $z = 6x + 8y - 25$. b) $16x + 12y - 125z + 75 = 0$. c) $\pi x + y + z = 2\pi$.

d) $8x + 8y - z = 12$. e) $z = 0$.

14 a) $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+4}{-1}$. b) $(x,y,z) = (\pi/2, 0, 3) + \lambda(0,0,-1)$.

1 a) $8/3$. b) 0.1757. c) $15/4$. d) $\pi a^2/2$. e) $(a/2)(\pi/4-\arctan(1/a))$. f) $11a^4/24$. g) $252/5$. h) $9/4$.

2 a) $\displaystyle\int_3^4\int_1^3 f(x,y)\,dy\,dx$. b) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$. c) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$.

d) $\displaystyle\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,y)\,dy\,dx$. e) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$.

f) $\displaystyle\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{1/2}^{\sqrt{2}}\int_0^{1} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$.

3 a) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x+y+10)\,dy\,dx=40\pi$. b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} xy\,dy\,dx=0$.

c) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^x x\cos(x+y)\,dy\,dx=\frac{\pi^4}{8}$. e) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^{\sin x}(x^2-y^2)\,dy\,dx=\pi^2-\frac{40}{9}$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy\,dx+\int_0^1\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy\,dx=e-e^{-1}$.

4 $16\sqrt{15}/3$.

5 $8/3$.

6 $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{2-y^2}} xy\,dx\,dy=1/4$.

7 a) $52/3$. b) 9.

8 $e+3/2$.

9 $3\pi^2/4-2$.

10 1.26.

11 b) $\displaystyle I=\int_0^2\int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} y\,dx\,dy=\int_{-2\sqrt{2}}^{-2}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} y\,dy\,dx+\int_{-2}^2\int_0^2 y\,dy\,dx+\int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} y\,dy\,dx$.

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\sin\alpha\,dr\,d\alpha+\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2/\sin\alpha} r^2\sin\alpha\,dr\,d\alpha+\int_{3\pi/4}^{\pi}\int_0^{2\sqrt{2}} r^2\sin\alpha\,dr\,d\alpha$.

d) $\dfrac{16}{3}(2\sqrt{2}-1)$. e) 0; $\dfrac{16}{3}(2\sqrt{2}-1)$; 0.

12 a) $\pi a^3/6$. b) $\pi a^4/8$. c) $\pi a^2/2$.

13 $\pi(e-1)$.

14 $65\pi/2592$.

15 $5 + 15\arctan(3) - 15\pi/4 \simeq 11.955$.

16 $\dfrac{3}{4}(\pi + 2)$.

17 $13/12$.

18 a) πab .   b) $\pi a^3 b/4$.   c) 0 .

19 $\displaystyle\int_0^c du \int_\alpha^\beta u\, f(u, uv)\, dv$.

20 $\dfrac{63}{2}\ln 2$.

21 21 .

22 $\ln\sqrt{2}$.

23 $\dfrac{1}{4}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$.

24 $\dfrac{e}{2} - 1$.

25 -2π .

26 Preneu, per exemple,
$R_n = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le e^a/n\,,\ 0 \le y \le 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1/n \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1\big\}$.
f no és integrable en R .

27 És integrable per a tot $c \in (0,1)$.

28 No és integrable.

29 a) És integrable si, i només si, $a < 1$. La integral val $\dfrac{\pi}{1-a}$.

b) En $x^2 + y^2 \ge 2$ és integrable si, i només si, $a > 1$. La integral val $\dfrac{\pi}{a-1}$.

En $x^2 + y^2 \ge 2$ no és integrable per a cap valor d'a.

31 $1/2$.

32 1 .

33 $\frac{e^c}{ab}$.

34 $1/6$.

Solucions del tema 5

1 $J(g\circ f)(2,2) = (12, 40)\,.$

2 $Jf(x,y) = (y\cos(xy)g(\sin(xy)) - g(x),\ x\cos(xy)g(\sin(xy)))\ .$

3 $Jf(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ \ Jg(f(1,2) = (1 \quad -6 \ \ 1)\ ;\ J(g\circ f)(1,2) = (-4 \quad -6)\,.$

4 $\begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y & 0 & 0 \\ y & x & 2(z+t) & 2(z+t) \\ 0 & 0 & 3(z+t)^2 & 3(z+t)^2 \end{pmatrix}.$

5 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4xe^{2(x^2+y^2)} + 2x}{e^{2(x^2+y^2)} + x^2 + y}\ ;\ \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4ye^{2(x^2+y^2)} + 1}{e^{2(x^2+y^2)} + x^2 + y}\,.$

7 Si diem v_1, v_2 i v_3 les variables de la funció f:
$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial v_1} + \dfrac{\partial f}{\partial v_2}\dfrac{\partial g}{\partial x}\ ,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial v_2}\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v_3}\dfrac{\partial h}{\partial y}\ ,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial v_3}\dfrac{\partial h}{\partial z}\,.$

9 $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial v}\ ,\quad \dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial v}\,.$

11 a) 0. b) $-\pi/2$. c) 1. d) $1/2$. e) -1. f) -1.

12 $a \neq 0\ ;\ \ y' = \dfrac{\sin x - 1}{e^y + 1}\,.$

13 a) $-1\ ;\ \ -1$. b) $0\ ;\ \ 0$. c) $1/3\ ;\ \ 1/3$. d) $-3/4\ ;\ \ -1$.

14 a) $12x + 4y + 6z = 98$. b) $x + y + 2z = 2$. c) $13x + 15y + z + 15 = 0$.
d) $6x - 2y + 15z = 22$. e) $4x + y + z = 13$.

15 El pla tangent és $z = 1$.

16 $y'(0) = -1\ ,\ \ z'(0) = 5\,.$

17 Hi ha dues solucions: $(0,2,0,1,-1)$ i $(0,2,0,-1,1)$.

18 a) $2x - y + 2z = 7$.

19 $f^{-1}(x,y) = \left(\ln\dfrac{x+y}{2}, \ln\dfrac{x-y}{2}\right).$

22 $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

23 b) $(1 \ \ 2)$. c) 0. d) $\sqrt{5}$. e) $y = -x/2$.

2 a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(x^2+y)^2}$.

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{-y^2}{(2xy+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{-x^2}{(2xy+y^2)^{3/2}}$.

3 $-2x\sin(xy) - x^2\cos(xy)$.

7 $y''(1) = 0$.

8 a) $1 + \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{\pi^2}{4}(x-1) + \pi\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \dfrac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(y - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

b) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{4}$.

c) 1 .

d) $1 + x + y + \dfrac{x^2}{2} + xy + \dfrac{y^2}{2}$.

e) $2xy$.

f) xy .

g) $2\sqrt{\pi}(x-\sqrt{\pi}) + 2\sqrt{\pi}(y-\sqrt{\pi}) + (x-\sqrt{\pi})^2 + (y-\sqrt{\pi})^2$.

h) $-1 + 2x + (x-1)^2 + (x-1)(y-2)$.

9 $1 + x + y + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)(y+1) + d\dfrac{1}{2}(y+1)^2$

$+\dfrac{1}{6}(x-1)^3 + \dfrac{1}{2}(x-1)^2(y+1) + \dfrac{1}{2}(x-1)(y+1)^2 + \dfrac{1}{6}(y+1)^3$.

10 a) $1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^2y^2}{4} + \dfrac{y^4}{24}$.

b) $1 + 2x + 2x^2 - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{4x^3}{3} - xy^2$.

11 $3 + 4(x-1) + 4(y-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$.

12 0 .

13 a) $2x + 3y - 2x^2 - 6xy - \dfrac{9y^2}{2}$. b) $f(1/10, 1/10) = \dfrac{3}{8} \pm \dfrac{1}{24}$.

14 a) 2.0025 . b) 0.9999 . c) 0.9020 .

15 b) $-\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{xy}{4} - \dfrac{3y^2}{8}$. c) Sí.

1 a) $(0,0)$ punt de sella; $(3,3)$ mínim relatiu. b) $(0,0)$ punt de sella.

c) $(0,0)$mpunt de sella; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ mínims relatius.

d) Tota la recta $3x+y+2=0$ és de mínims relatius.

e) $(0,0)$ màxim relatiu; $(2/5,2/5)$ punt de sella.

f) $(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$ mínim relatiu; $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ màxim relatiu.

g) La corba $x=y^2$, llevat del $(0,0)$, és de màxims relatius; la corba $x=-y^2$, llevat del $(0,0)$, és de mínims relatius; la semirecta $\{y=0,\ x>0\}$ és de mínims relatius; la semirecta $\{y=0,\ x<0\}$ és de màxims relatius; $(0,0)$ és punt de sella.

h) $(1,0)$ i $(0,1)$ són punts de sella; $(2/5,2/5)$ màxim relatiu; les semirectes $\{y=0,\ x>1\}$ i $\{x=0,\ y>1\}$ són de màxims relatius; les semirectes $\{y=0,\ x<1\}$ i $\{x=0,\ y<1\}$ són de mínims relatius.

i) $(0,0)$ i $(9,27/2)$ són punts de sella.

j) Amb n i m enters, $(n\pi,m\pi)$ són punts de sella, i $\left((2n+1)\frac{\pi}{2},(2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ són màxims relatius si $n+m$ és parell i mínims relatius en cas contrari.

k) Si $ab>0$, els punts de $y=x+n\pi$ són màxims relatius si n és parell, mínims relatius si n és senar. Si $ab<0$, els punts de $y=x+n\pi$ són mínims relatius si n és parell, màxims relatius si n és senar.

l) En $(1,1)$ màxim relatiu; en els punts de la corba $(x-1)^2+4(y-1)^2=5$ mínims relatius.

m) $(3,0)$, $(0,0)$ i $(0,3)$ punts de sella; $(3/4,3/2)$ màxim relatiu; $\{y=0,\ x<0\}$ i $\{y=0,\ x>3\}$ màxims relatius; $\{y=0, 0<x<3\}$ mínims relatius.

n) $(0,0)$ mínim relatiu. o) $(-1/3,-1/3)$ mínim relatiu. p) $(1,1)$ mínim relatiu.

q) $(0,0)$ punt de sella. r) $(0,0)$ punt de sella.

s) $(2,1)$ mínim relatiu; $(-2,-1)$ màxim relatiu; $(1,2)$ i $(-1,-2)$ punts de sella.

t) En el punts $(\pi/6+2n\pi,\pi/6+2m\pi)$ i $(5\pi/6+2n\pi,5\pi/6+2m\pi)$ amb $m,\ n\in\mathbb{Z}$ hi ha màxims relatius. En els punts $((n+1/2)\pi,(m+1/2)\pi)$ hi ha mínims relatius si m i n són senars, altrament són punts de sella.

2 a) $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ i $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ són punts de sella. b) Sí.

3 a) Un màxim en $(1/2,1/2)$. b) Un màxim a $(1,2)$ i un mínim a $(-1,-2)$.

c) Un mínim a $(18/13,12/13)$. d) Un mínim a $(1/5,1/5,3/5)$.

4 Màxim absolut $f(-5,5)=83$, mínim absolut $f(1,-2)=-2$.

5 Màxim absolut $f(-3/\sqrt{5},-3/\sqrt{5})=17+6\sqrt{5}$, mínim absolut $f(1,2)=3$.

6 Màxim absolut $f(-6,-8)=225$, mínim absolut $f(3,4)=0$.

7 Màxim absolut $f(-2,-2) = 98$, mínim absolut $f(6,4) = -2$.

8 Màxim absolut $f(-1,0) = 8$, mínim absolut $f(1/2, 3/2) = -13/4$.

9 Màxim absolut $f(2,0) = 14$, mínim absolut $f(0,0) = 0$.

10 Màxim absolut $f(-3,0) = f(0,-3) = 6$, mínim absolut $f(-3/2,-3/2) = -3/4$.

11 No té extrems relatius. Màxim absolut $f(\ln 2, 0) = 1/4$, mínim absolut $f(0, \ln 2) = -1/4$.

12 Màxim absolut $f(0,0) = 1$, mínim absolut $f(1,0) = 1/e$.

13 a) Valor màxim $\dfrac{1}{n^n}$ per a $x_i = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

b) Preneu $x_i^2 = \dfrac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ i useu que, segons a), $x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 \leq 1/n^n$.

14 Si a és el costat del quadrat i r el radi del cercle, l'àrea màxima és $L^2/4\pi$ amb $a = 0$ i $r = L/2\pi$, i l'àrea mínima és $L^2/(4\pi + 16)$ amb $a = L/(4+\pi)$ i $r = L/(8 + 2\pi)$.

15 És el cub d'aresta $\sqrt{25/6}$.

16 És el cub d'aresta $d/\sqrt{3}$.

3 a) $y = \arctan e^x + C$. b) $e^{x+y} = C(e^y - 1)$. c) $Cxy - y + 1 = 0$. d) $y^2 = 2\ln(1+e^x) + C$.

4 a) $Cy^2 = xe^{x^2/y^2}$. b) $y = x\sin(\ln(Cx))$. c) $y^2 = Cx^3 + x^2$. d) $e^{x/y} = Cx$.

5 a) $(x^2 + (y-1)^2)e^{2\arctan\frac{y-1}{x}} = C$. b) $x - y + \ln|x+y| = C$.
c) $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$. d) $(x/y)e^{xy} = C$.

6 a) $y = \dfrac{x}{2\cos x} + \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{C}{\cos x}$. b) $y = -x\cos x + Cx$.
c) $y = e^{x^2+x} + Ce^x$. d) $y = \dfrac{1}{4}(x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}$.

7 Equació $y' = y + 3$ amb $y(0) = 2$; solució $y = e^x - 3$.

8 Equació $y' = Kx$; solució $y = (K/2)x^2 + C$.

9 Equació $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{y}{y'}\right)y = 1$ amb $y(2) = 1$; solució $y^2 - xy + 1 = 0$.

10 Equació $y = a^2\dfrac{y'}{y}$ amb $y(0) = a$; solució $y = \dfrac{a^2}{a - x}$.

11 Equació $\dfrac{dm(t)}{dt} = Km(t)$ amb $m(0) = m_0$ i $m(1600) = \dfrac{m_0}{2}$; solució
$m(t) = m_0(1/2)^{t/1600}$; en un segle es perd el 4.24%.

12 Equació $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$ amb $v(0) = 0$; solució $v = \sqrt{gm/k}\tanh(t\sqrt{gk/m})$.

13 Equació $\dfrac{dT}{dt} = K(T - 15)$ amb $T(0) = 420$ i $T(30) = 150$; solució $T = 15 + \dfrac{405}{3^{t/30}}$;
$T = 30$ per a $t = 90$, és a dir, a les 13:30 h.

14 Equació $\dfrac{dP}{dt} = aP - bP^2$ amb $P(0) = P_0$; solució $P = \dfrac{P_0e^{at}}{1 + \frac{b}{a}P_0(e^{at} - 1)}$.