

0.1 Axioma d'Elecció i Nombres Cardinals

Exercici 0.1.1 *Demostreu que les tres formes següents de l'axioma d'elecció són equivalents:*

1. AE1. Donada $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ col·lecció de conjunts no buits, existeix f (funció d'elecció), $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ amb $f(i) \in X_i$.
2. AE2. Donat X no buit, existeix f (funció d'elecció), $f : P(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ amb $f(y) \in y$.
3. AE3. El producte cartesià d'una col·lecció de conjunts no buits és no buit.

Exercici 0.1.2 *Demostreu que un conjunt parcialment ordenat (X, \leq) és ben ordenat sii és totalment ordenat i a més no hi ha successions infinites estrictament descendents (és a dir, no hi ha $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ amb $x_{n+1} < x_n$).*

Exercici 0.1.3 *Sigui (X, \leq) un conjunt ben ordenat. Demostreu que val el principi d'inducció següent:*

Si Y és un subconjunt de X tal que

$$\text{per tot } x \in X, \text{ si } \{y \in X \mid y < x\} \subseteq Y \text{ implica } x \in Y,$$

llavors $Y = X$.

Exercici 0.1.4 *Demostreu que el Lema de Zorn implica l'axioma d'Elecció directament.*

Exercici 0.1.5 (AE) *Demostreu que $|X| \leq |Y|$ sii existeix $F : Y \rightarrow X$ exhaustiva.*

Exercici 0.1.6 *X un conjunt. Demostreu que són equivalents:*

1. X és equipotent a un subconjunt propi seu.
2. X és infinit (existeix $f : X \rightarrow X$ injectiva i no exhaustiva).
3. existeix $f : X \rightarrow X$ exhaustiva i no injectiva.

Exercici 0.1.7 *Useu el Lema de Zorn per demostrar que tot ideal propi d'un anell unitari està contingut en un ideal maximal.*

Exercici 0.1.8 *Useu el Lema de Zorn per demostrar que tot ordre parcial en un conjunt es pot estendre a un ordre total sobre el mateix conjunt. Més precisament: donat (X, R) parcialment ordenat, existeix S amb $R \subseteq S \subseteq X^2$ tal que S és un ordre total a X .*

Exercici 0.1.9 Useu el Lema de Zorn per demostrar que tot espai vectorial sobre un cos té una base.

Exercici 0.1.10 Useu l'axioma d'elecció per a provar que existeixen subconjunts de \mathbb{R} no mesurables (per la mesura de Lebesgue) (indicació: Considereu \mathbb{R} com a grup additiu i el quocient \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Trieu Representants de \mathbb{R}/\mathbb{Q} a l'interval $[0, 1]$).

Exercici 0.1.11 Proveu que el Lema de Zorn és equivalent al següent principi:
En tot conjunt parcialment ordenat (X, \leq) , el conjunt de les cadenes de X té elements maximals (per la inclusió).

Exercici 0.1.12 Es diu que un conjunt A té caràcter finit si satisfà la propietat següent:

$$X \in A \text{ si i només si } \text{ tot subconjunt finit de } X \text{ pertany a } A$$

Demostreu que el Lema de Zorn és equivalent al següent principi:

(Lema de Tuckey): tot conjunt amb caràcter finit té elements maximals per la inclusió.

Exercici 0.1.13 Proveu que el conjunt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és numerable utilitzant l'aplicació $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida per

$$f(n, m) = 1 + 2 + \dots + (n + m) + n.$$

Calculeu-ne la inversa.

Exercici 0.1.14 Useu el Teorema de Cantor per a provar que el conjunt de tots els conjunts no existeix.

Exercici 0.1.15 Proveu que les afirmacions següents són certes per a qualssevol conjunts X, X', Y, Y' tals que $X \sim X'$ i $Y \sim Y'$.

1. $X \sqcup Y \sim X' \sqcup Y'$ (l'operació \sqcup indica la reunió disjunta de dos conjunts, és a dir, $X \sqcup Y = X \times \{x\} \cup Y \times \{y\}$, on x, y són dos elements diferents qualssevol).
2. $X \times Y \sim X' \times Y'$.
3. ${}^X Y \sim {}^{X'} Y'$ (${}^X Y$ denota el conjunt de les aplicacions de X en Y).
4. $\mathcal{P}(X) \sim \mathcal{P}(X')$.

Les propietats anteriors permeten definir operacions aritmètiques entre cardinals. Concretament, si λ i μ són cardinals i X, Y són conjunts tals que $|X| = \lambda, |Y| = \mu$, es defineix

$$\lambda + \mu = |X \sqcup Y|, \quad \lambda \cdot \mu = |X \times Y| \quad \text{i} \quad \mu^\lambda = |{}^X Y|.$$

Exercici 0.1.16 Demostreu que les afirmacions següents són certes.

1. Tant la suma com la multiplicació de cardinals són associatives i commutatives.
2. La multiplicació és distributiva respecta la suma.
3. Per a qualssevol cardinals λ, μ, κ :
 - (a) $\lambda^{\mu+\kappa} = \lambda^\mu \cdot \lambda^\kappa$.
 - (b) $(\lambda^\mu)^\kappa = \lambda^{\mu \cdot \kappa}$.
 - (c) $(\lambda \cdot \kappa)^\mu = \lambda^\mu \cdot \kappa^\mu$.
4. Si $\lambda \leq \lambda'$ i $\mu \leq \mu'$ llavors
 - (a) $\lambda + \mu \leq \lambda' + \mu'$.
 - (b) $\lambda \cdot \mu \leq \lambda' \cdot \mu'$.
 - (c) $\lambda^\mu \leq \lambda'^{\mu'}$.

Exercici 0.1.17 Demostreu que un conjunt X és infinit si i només si $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ conté un subconjunt numerable.

Exercici 0.1.18 Sigui $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ una col·lecció de conjunts.

1. Demostreu que $|\bigcup_{i \in I} X_i| \leq |I| \cdot \sup\{|X_i| \mid i \in I\}$.
2. Demostreu que si $|\bigcup_{i \in I} X_i| \geq \aleph_0$ i els conjunts són no buits i disjunts dos a dos llavors hi ha igualtat.
3. Doneu exemples on no hi ha igualtat.

Exercici 0.1.19 Demostreu que

$$|\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ són algebraicament independents}\}| = 2^{\aleph_0}$$

Exercici 0.1.20 Demostreu que $|P(X)| = 2^{|X|}$

Exercici 0.1.21 Demostreu que si (X, \leq) és un conjunt totalment ordenat que conté un subconjunt dens numerable llavors $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

- Exercici 0.1.22**
1. Demostre que si λ és un cardinal infinit llavors $\lambda^\lambda = 2^\lambda$
 2. Més en general, si λ és infinit i $2 \leq \mu \leq \lambda$ llavors $\mu^\lambda = 2^\lambda$.

Exercici 0.1.23 Demostreu que els conjunts \mathbb{Z} i \mathbb{N} són equipotents, i dedueu que tant el conjunt dels nombres racionals com el conjunt dels nombres algebraics són ambdós numerables. Quin és el cardinal del conjunt dels nombres transcendents?

Exercici 0.1.24 Quantes funcions $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ hi ha? Quantes d'elles són contínues? I derivables? I analítiques?

Exercici 0.1.25 Demostreu que hi ha 2^{\aleph_0} oberts a \mathbb{R}^n .

Exercici 0.1.26 Demostreu que hi ha el mateix nombre de successions d'enters que de successions de reals.

Exercici 0.1.27 Siguin λ, κ i μ cardinals tals que $\lambda < \mu$.

1. Doneu condicions suficients sobre κ per tal de poder garantir que $\lambda^\kappa < \mu^\kappa$.
2. Doneu condicions suficients sobre κ per tal de poder garantir que $\lambda^\kappa = \mu^\kappa$.
3. Doneu exemples amb κ, λ, μ infinits amb $\lambda < \mu$ on es compleixi la igualtat $\lambda^\kappa = \mu^\kappa$ i on no es compleixi.

Exercici 0.1.28 (i) Proveu que el conjunt de reals \mathbb{R} no és numerable.

(ii) Demostreu que $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(iii) Doneu una demostració directa, utilitzant l'apartat anterior, del fet que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$.

Exercici 0.1.29 Siguin λ, κ cardinals tals que $\lambda \leq \kappa, \aleph_0 \leq \kappa$. Denotem per $\binom{\kappa}{\lambda} = |P_\lambda(A)|$, on A és un conjunt de cardinal κ i $P_\lambda(A) = \{B \in P(A) : |B| = \lambda\}$. Anàlogament denotem per $\binom{\kappa}{\leq \lambda} = |P_{\leq \lambda}(A)|$, on A és un conjunt de cardinal κ i $P_{\leq \lambda}(A) = \{B \in P(A) : |B| \leq \lambda\}$. Demostreu que

1. $\binom{\kappa}{\leq \lambda} = \binom{\kappa}{\lambda}$.
2. $\kappa^\lambda = \binom{\kappa}{\lambda} \cdot 2^\lambda$ (Indicació: useu l'exercici 0.1.18 i l'apartat anterior)
3. $2^\lambda \leq \binom{\kappa}{\lambda}$.
4. $\binom{\kappa}{\lambda} = \kappa^\lambda$.

$$\binom{\kappa}{\lambda} = \kappa^\lambda.$$

Exercici 0.1.30 Sigui X un conjunt infinit. Demostreu que

1. Hi ha una bijecció $f \in^X X$ que no deixa cap element fix.
2. El nombre de bijeccions de X en X és $2^{|X|}$ (Indicació: una manera de fer-ho és usant l'apartat anterior).
3. Hi ha $2^{|X|}$ bijeccions de X en X que no deixen cap element fix. (Indicació: una manera de fer-ho és usant l'apartat anterior).

Exercici 0.1.31 Siguin X, Y conjunts amb Y infinit i $|X| \leq |Y|$. Calculeu quantes aplicacions injectives de X en Y i quantes aplicacions exhaustives de Y en X hi ha (Indicació: per el cas de les injectives useu els exercicis 0.1.29 i 0.1.30).