Solució de l'examen parcial de Lògica

F. M. E. 19/11/2007

Problemes Resolts

Problema 1. Sigui λ és un cardinal infinit i X un conjunt de cardinal λ. Es defineix la cofinalitat de λ com el mínim nombre de conjunts de cardinal més petit que λ que hem de reunir per tal d'obtenir X. Més precisament:

$$\operatorname{cof}\lambda := \min\left\{ |I| \;\middle|\; \text{hi ha una col·lecció de conjunts } (X_i \mid i \in I) \text{ satisfent} \right. \\ \left. \text{per a cada } i \quad |X_i| < \lambda, \quad X = \bigcup_{i\in I} X_i \right\}$$

a. Demostreu que la cofinalitat està ben definida (no depèn de X) i que $\operatorname{cof}\lambda \leq \lambda$.

b. Demostreu que $\lambda = \operatorname{cof}\lambda \cdot \sup\{\mu \mid \mu < \lambda\}$. (*indicació: useu la desigualtat de l'exercici 1.20*)

c. Demostreu que la cofinalitat de $\aleph_n$ és $\aleph_n$. (*indicació: useu la fórmula de l'apartat b)*)

d. Demostreu que la cofinalitat de $\aleph_\omega$ és $\aleph_0$. (*indicació: construïu un conjunt de cardinal $\aleph_\omega$ fent la reunió de conjunts de cardinal $\aleph_n$ amb $n \in \mathbb{N}$*).

Solució:

a. Si notem per

$$C_X := \left\{ |I| \;\middle|\; \text{hi ha una col·lecció de conjunts } (X_i \mid i \in I) \text{ satisfent} \right. \\ \left. \text{per a cada } i \quad |X_i| < \lambda, \quad X = \bigcup_{i\in I} X_i \right\},$$

veurem que si Y és un altre conjunt de cardinal λ, llavors $\min C_X = \min C_Y$. Prenem una bijecció $f : X \to Y$. Per a cada col.lecció de conjunts $(X_i \mid i \in I)$ satisfent que per a cada i $|X_i| < \lambda$ i $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ tenim la col.lecció $(f(X_i) \mid i \in I)$ que satisfà que per a cada i $|f(X_i)| < \lambda$ i $Y = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$. Això demostra que $C_X \subseteq C_Y$. Aplicant-ho a l'aplicació inversa f^{-1} obtenim $C_X = C_Y$ i per tant $\min C_X = \min C_Y$.

Per tal de veure que $\operatorname{cof}(\lambda) \leq \lambda$ només cal observar que podem expressar $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ i per tant $|X| \in C_X$, és a dir $\operatorname{cof}(\lambda) \leq |X| = \lambda$.

Si la cofinalitat de λ fos finita, posem n, llavors tindríem que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ amb $|X_i| < \lambda$. Això no pot ser, ja que llavors tindríem que $\lambda = |X| \leq \max\{|X_i| \mid i = 1..n\} < \lambda$.

b. Sigui $(X_i \mid i \in I)$ una col.lecció de conjunts per a la que s'assoleix el mínim, és a dir, $\operatorname{cof}(\lambda) = |I|$. Ara, per l'exercici 1.20, $\lambda = |X| \leq |I| \sup\{|X_i| \mid i \in I\}$. Com que cada X_i té cardinal menor que λ tenim $\sup\{|X_i| \mid i \in I\} \leq \sup\{\mu \mid \mu < \lambda\} \leq \lambda$. Tenint en compte tot això i que $\operatorname{cof}(\lambda) \leq \lambda$ tenim

$$\lambda = |X| \leq |I| \sup\{|X_i| \mid i \in I\} \leq \operatorname{cof}(\lambda) \sup\{\mu \mid \mu < \lambda\} \leq \lambda\lambda = \lambda,$$

d'on s'en segueix que $\lambda = \operatorname{cof}\lambda \cdot \sup\{\mu \mid \mu < \lambda\}$.

c. Distingim dos casos, segons $n = 0$ o n és més gran que zero. El cas $n = 0$ surt per l'apartat a): $\aleph_0 \leq \operatorname{cof}(\aleph_0) \leq \aleph_0$. Si n no és zero resulta que $\sup\{\mu \mid \mu < \aleph_n\} = \aleph_{n-1}$. Sabem per l'apartat a) que la cofinalitat de $\aleph_n$ és com a molt $\aleph_n$. Si fos menor tindríem que $\operatorname{cof}(\aleph_n) \leq \aleph_{n-1}$ i per l'apartat b)

$$\aleph_n = \operatorname{cof}(\aleph_n) \sup\{\mu \mid \mu < \aleph_n\} \leq \aleph_{n-1}\aleph_{n-1} = \aleph_{n-1},$$

absurd.

d. Per a cada n triem un conjunt X_n de cardinal $\aleph_n$ (usem l'axioma d'elecció). Primer veiem que $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ té cardinal $\aleph_\omega$. D'una banda, com que $X_n \subseteq X$ tenim que $\aleph_n = |X_n| \leq |X|$. Com que aquesta desigualtat val per a tots el n tenim que $\aleph_\omega \leq |X|$. D'altra banda, per la desigualtat de l'exercici 1.20, $|X| \leq \aleph_0 \sup\{\aleph_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \aleph_0\aleph_\omega = \aleph_\omega$. Ara que sabem que X té cardinal $\aleph_\omega$, de la descomposició $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ deduïm que $\operatorname{cof}(\aleph_\omega) \leq \aleph_0$. Com que no pot ser finita tenim que $\operatorname{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0$.

Problema 2.

a. Demostreu que els homomorfismes preserven totes les fórmules sense quantificadors i sense igualtat (no contenen el símbol d'igualtat).

b. Demostreu que els homomorfismes exhaustius preserven totes les fórmules sense igualtat.

Recordem que un homomorfisme $h : M \to N$ preserva φ significa que per a qualsevol assignació de variables $\sigma : V \to D_M$ es té:

$$M \models \varphi[\sigma] \text{ si i només si } N \models \varphi[h \circ \sigma].$$

Solució:

a. Ho fem per inducció sobre la fórmula φ i utilitzarem que per tot terme t es té que
$$h(t^M[\sigma]) = t^N[h \circ \sigma].$$

El cas en que φ és atòmica només haurem de considerar la fórmula $\varphi = rt_1 \dots t_n$, ja que no hi ha igualtat. Llavors $M \models rt_1 \dots t_n[\sigma]$ si i només si (per definició) $(t_1^M[\sigma], \dots, t_n^M[\sigma]) \in r^M$ si i només si (per ser homomorfisme) $(h(t_1^M[\sigma]), \dots, h(t_n^M[\sigma])) \in r^N$ si i només si (per la igualtat $h(t_i^M[\sigma]) = t_i^N[h \circ \sigma]$) $(t_1^N[h \circ \sigma], \dots, t_n^N[h \circ \sigma]) \in r^N$ si i només si (per definició) $N \models rt_1 \dots t_n[h \circ \sigma]$.

El cas en que la fórmula és $\neg\varphi$ es fa així: $M \models \neg\varphi[\sigma]$ si i només si (per definició de la semàntica) $M \not\models \varphi[\sigma]$ si i només si (per hipòtesi d'inducció) $N \not\models \varphi[h \circ \sigma]$ si i només si (per definició de la semàntica) $N \models \neg\varphi[h \circ \sigma]$.

El cas en que la fórmula és $(\psi \vee \varphi)$ es fa així: $M \models (\psi \vee \varphi)[\sigma]$ si i només si (per definició de la semàntica) $M \models \varphi[\sigma]$ o $M \models \varphi[\sigma]$ si i només si (per hipòtesi d'inducció) $N \models \psi[h \circ \sigma]$ o $N \models \varphi[h \circ \sigma]$ si i només si (per definició de la semàntica) $N \models (\psi \vee \varphi)[h \circ \sigma]$.

Les demés connectives binàries es fan anàlogament (alternativament podem considerar que en construir les fórmules només hem usat les connectives $\vee$ i $\neg$).

b. Un altre cop ho fem per inducció sobre la fórmula φ. Com que no té igualtat el cas atòmic es redueix de nou a les fórmules del tipus $rt_1 \dots t_n$, que ja hem fet a l'apartat a). El cas en que la fórmula és del tipus $\neg\varphi$ o $(\psi \vee \varphi)$ és fa idènticament a l'apartat a). Només queda fer el cas en que la fórmula comença amb un quantificador, per exemple existencial: $\exists x\varphi$ (el cas universal es fa anàlogament).

$M \models \exists x\varphi[\sigma]$ si i només si (per definició de la semàntica) hi ha un $a \in D_M$ tal que $M \models \varphi[\sigma_a^x]$ si i només si (per hipòtesi d'inducció) hi ha un $a \in D_M$ tal que $N \models \varphi[h \circ (\sigma_a^x)]$ si i només si (perquè $h \circ (\sigma_a^x) = (h \circ \sigma)_{ha}^x$) hi ha un $a \in D_M$ tal que $N \models \varphi[(h \circ \sigma)_{ha}^x)]$ si i només si (h és exhaustiva) hi ha un $b \in D_N$ tal que $N \models \varphi[(h \circ \sigma)_b^x)]$ si i només si (per definició de la semàntica) $N \models \exists x\varphi[h \circ \sigma]$.

Problema 3. Considerem el vocabulari $S = \{r\}$, on r és un símbol de relació binària i l'estructura $M := (\mathbb{Z}, \leq)$, on $\leq$ indica l'ordre usual dels enters.

1. Demostreu que a M hi ha només dos conjunts definibles amb una variable lliure (subconjunts de M^1). (*Indicació: useu que els conjunts definibles són invariants per automorfisme.*)

2. Suposem ara que D és un subconjunt definible de M^2 que conté un punt de la recta $y = x+n$ (amb n enter). Demostreu que llavors D conté tota la recta $y = x+n$. (*Indicació: useu que els conjunts definibles són invariants per automorfisme.*)

3. Demostreu que totes les rectes de l'apartat anterior són definibles.

Solució:

1. Primer observem que $h_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida per $h_n(x) = x + n$ és un automorfisme (per a cada n enter): és una bijecció que preserva l'ordre, doncs $a \leq b$ sii $a + n \leq b + n$ per a cada parella d'enters a, b. Obviament el buit i D_M són definibles, sempre ho son per les fórmules $\neg x \approx x$ i $x \approx x$ respectivament. Anem a veure que no n'hi ha més. Si D és un subconjunt de D_M definible (amb una variable lliure) no buit, sigui $a \in D$ i b un enter qualsevol. Com que $h_{b-a}(a) = b$ i D és invariant per automorfisme ($\overline{a} \in D$ sii $h\overline{a} \in D$ si h és un automorfisme) resulta que $b \in D$. Acabem de veure que si D és no buit ha de ser tot $\mathbb{Z}$.

2. Suposem ara que D conté el punt $(a, a+n)$ de la recta $y = x+n$ i sigui $(b, b+n)$ un altre punt qualsevol d'aquesta recta. Com que $h_{b-a}(a, a+n) = (b, b+n)$ i D és invariant per automorfisme tenim que $(b, b+n) \in D$ i per tant D conté tota la recta.

3. Quan $n = 0$ la recta es defineix per la fórmula $x \approx y$. Quan $n > 0$ hem d'expressar que "entre x i y hi ha exactament $n+1$ elements (incloent x i y)". Això es fa dient que "hi ha n+1 individus $z_1, \ldots, z_{n+1}$ diferents situats entre x i y i qualsevol altre situat entre ells ha de ser un d'aquests" Això es fa amb la fórmula següent:

$$\exists z_1 \ldots \exists z_{n+1} \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} rxz_i \wedge rz_iy \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n+1} \neg z_i \approx z_j \wedge \forall z \left(rxz \wedge rzy \to \bigvee_{i=1}^{n+1} z \approx z_i \right) \right)$$