
Solució de l'examen parcial de Lògica

F. M. E.

11/11/2004

Problemes Resolts

Problema 1. Demostreu que el conjunt

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ són algebraicament independents}\}$$

té cardinal 2^{\aleph_0} .

Solució:

Al conjunt

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_1, \dots, x_n \text{ són algebraicament independents}\}$$

el denotem \mathcal{AI}_n

Comencem per el cas $n = 1$. \mathcal{AI}_1 és el conjunt de tots els complexos transcendents i el seu complementari $\mathbb{C} \setminus \mathcal{AI}_1$ són tots els complexos algebraics. Quants polinomis en una variable hi ha a coeficients enters? N'hi ha una quantitat numerable, doncs els polinomis (a coeficients enters) són successions finites d'enters. Ara bé, cada polinomi no nul té només un nombre finit de zeros. Així, el conjunt de nombres algebraics és una reunió numerable de conjunts finits, i per tant és numerable:

$$|\mathbb{C} \setminus \mathcal{AI}_1| = \aleph_0.$$

Com que \mathbb{C} és equipotent a \mathbb{R}^2 el cardinal de \mathbb{C} és $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Com que

$$\mathbb{C} = \mathcal{AI}_1 \cup (\mathbb{C} \setminus \mathcal{AI}_1)$$

el cardinal de \mathcal{AI}_1 ha de ser 2^{\aleph_0} , ja que si fos menor, posem λ amb $\lambda < 2^{\aleph_0}$, llavors

$$|\mathbb{C}| = \max \{\aleph_0, \lambda\} = \lambda < 2^{\aleph_0}.$$

Un cop resolt el cas per $n = 1$, el cas general surt observant el següent: si x_1 és transcendent existeixen complexos x_2, \dots, x_n tals que $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{AI}_n$, ja

que el grau de transcendència de \mathbb{C} és infinit. Això (usant l'axioma d'elecció) ens proporciona una aplicació injectiva de \mathcal{AI}_1 en \mathcal{AI}_n :

$$2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{AI}_1| \leq |\mathcal{AI}_n| \leq 2^{\aleph_0}$$

i per tant

$$|\mathcal{AI}_n| = 2^{\aleph_0}.$$

Problema 2. Siguin Γ un conjunt de fórmules i φ, ψ fórmules.

a. Demostreu que si x no és lliure a Γ (a cap de les fórmules de Γ) llavors:

$$\Gamma \models \varphi \text{ sii } \Gamma \models \forall x\varphi.$$

b. Si c és una constant que no apareix enlloc (ni a Γ ni a φ ni a ψ) llavors:

$$\Gamma, \exists x\varphi \models \psi \text{ sii } \Gamma, \varphi_c^x \models \psi.$$

Solució:

a. La implicació de dreta a esquerra surt usant que $\forall x\varphi \models \varphi$ i que la conseqüència lògica és transitiva.

Recíprocament, suposem que $\Gamma \models \varphi$ i siguin M una estructura i σ una assignació de variables en el domini de M tal que $M \models \Gamma[\sigma]$ (això indica que $M \models \gamma[\sigma]$ per a tota $\gamma \in \Gamma$). Hem de veure que $M \models \forall x\varphi[\sigma]$, és a dir, $M \models \varphi[\sigma]_a^x$ per a tot $a \in D_M$. Com que x no és lliure a cap de les fórmules de Γ , pel lema de coincidència, $M \models \Gamma[\sigma_a^x]$. Com que φ és conseqüència lògica de Γ tenim que $M \models \varphi[\sigma_a^x]$, i com que a era un element qualsevol del domini de M ja hem acabat.

b. Comencem amb la implicació d'esquerra a dreta. Suposem que $\Gamma, \exists x\varphi \models \psi$ i siguin M i σ tals que $M \models \Gamma[\sigma]$ i $M \models \varphi_c^x[\sigma]$. Hem de provar que $M \models \psi[\sigma]$. Pel lema de substitució (les constants sempre son substituïbles) $M \models \varphi[\sigma_{c^M}^x]$ (observeu que $c^M[\sigma] = c^M$) i per definició de la semàntica $M \models \exists x\varphi[\sigma]$. Com que ψ és conseqüència lògica de $\Gamma, \exists x\varphi$ concloem que $M \models \psi[\sigma]$.

Recíprocament, suposem ara que $\Gamma, \varphi_c^x \models \psi$, que $M \models \Gamma[\sigma]$ i que $M \models \exists x\varphi[\sigma]$. Hem de concloure que $M \models \psi[\sigma]$. Per la definició de la semàntica $M \models \varphi[\sigma]_a^x$ per a un cert element $a \in D_M$. Ara considerem l'estructura N següent: N és igual a M en tot (mateix domini i mateixa interpretació de cada símbol del llenguatge) llevat que canviem la interpretació de la constant c així:

$$c^N := a.$$

Com que c no apareix en cap de les fórmules que estem considerant, M i N coincideixen en la interpretació de tots els símbols (de funció, relació o

constant) que apareixen en totes aquestes fórmules i per tant $N \models \Gamma[\sigma]$ i $N \models \varphi[\sigma_a^x]$ (perquè tot això valia per M). Com que $c^N = a$, pel lema de substitució tenim que $N \models \varphi_c^x[\sigma]$. Com que ψ és conseqüència lògica de Γ, φ_c^x tenim que $N \models \psi[\sigma]$. Finalment com que ψ no conté la constant c i M i N coincideixen en la interpretació de tots els altres símbols, $N \models \psi[\sigma]$.

Problema 3. Per a cada un dels parells d'estructures següents, doneu un enunciat que valgui en una i no a l'altre:

1. $M := (\mathbb{N}, \leq)$ i $N := (\{0, 1\} \times \mathbb{N}, \leq)$
(N ordenat lexicogràficament i amb $0 < 1$)
2. $M := (\{1, \dots, 5\})$ i $N := (\{1, \dots, 10\})$
(aquí la signatura és buida i per tant no hi ha 'estructura', només hi ha domini)
3. $M := (\mathbb{Z}, +)$ i $N := (\mathbb{Q}, +)$

Solució:

1. A l'estructura N hi ha un element que no té 'anteriors' però que tampoc no és el primer element: el $(1, 0)$, en canvi no hi ha cap element d'aquest tipus a M . Així, l'enunciat:

$$\exists x \left(\exists y (y \leq x \wedge \neg y \approx x) \wedge \forall y (y \leq x \wedge \neg y \approx x \rightarrow \exists z (y \leq z \wedge \neg y \approx z \wedge z \leq x \wedge \neg z \approx x)) \right)$$

Val a N i no a M . Si pensem $y < x$ és una forma abreujada d'escriure $y \leq x \wedge \neg y \approx x$, llavors l'enunciat anterior s'expressa d'una manera més entenedora:

$$\exists x \left(\exists y (y < x) \wedge \forall y (y < x \rightarrow \exists z (y < z \wedge z < x)) \right)$$

2. Encara que la signatura sigui buida, sempre podem usar la igualtat per parlar de 'cardinals'. L'enunciat:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \forall x_6 \left(\bigvee_{1 \leq i < j \leq 6} x_i \approx x_j \right)$$

val a M i no a N . De fet, aquest enunciat expressa que hi ha com a molt 5 elements.

3. A N tots els elements són 'divisibles per 2' i en canvi no és cer a M . L'enunciat

$$\forall x \exists y (x \approx y + y)$$

val a N i no a M .