

Model Completesa (versió provisional)

Rafel Farré i Cirera

8 d'abril de 2005

1 Model Completesa

Definició 1.1 (immersions). Una *immersió* és una aplicació $f : M \rightarrow N$ que preserva les fórmules sense quantificadors. És a dir, si $\varphi(\bar{x})$ és una fórmula sense quantificadors, llavors

$$M \models \varphi(\bar{a}) \text{ sii } N \models \varphi(f(\bar{a})). \quad (1.1)$$

Com que de fet n'hi ha prou amb preservar les fórmules atòmiques, una immersió es pot definir alternativament com una aplicació injectiva tal que:

1. $f(g^M(\bar{a})) = g^N(f(\bar{a}))$ per a tota tupla \bar{a} de M i tot símbol de funció g^1 .
2. $\bar{a} \in R^M$ sii $f(\bar{a}) \in R^N$ per a tota tupla \bar{a} de M i tot símbol de relació R .

Una *immersió elemental* és una immersió que preserva totes les fórmules, és a dir es satisfà (1.1) per a una fórmula qualssevol. Quan la identitat és una immersió de M en N es diu que M és una *subestructura* i ho notarem per $M \subseteq N$. En el cas en que la identitat és elemental direm que M és *subestructura elemental* de N i ho notarem per $M \preceq N$. Quan es preserven totes les fórmules \prod_1 (o equivalentment \sum_1) llavors parlarem de *immersió existencialment tancada* i *subestructura existencialment tancada*. Això últim ho denotem per $M \preceq_1 N$.

Definició 1.2 (diagrames). Si M és una estructura, el *diagrama* de M , que denotarem per $D(M)$ és el conjunt de fórmules sense quantificadors amb paràmetres a M que valen a M :

$$D(M) = \{ \varphi \in L(M) \mid M \models \varphi, \text{ i } \varphi \text{ no té quantificadors} \}$$

Si ho fem amb totes les fórmules enlloc de les que no tenen quantificadors obtenim el *diagrama elemental* de M , que denotarem per $\Delta(M)$:

$$\Delta(M) = \{ \varphi \in L(M) \mid M \models \varphi \}$$

¹tractem les constants com a símbols funció unària

També farem servir el següent:

$$\Delta_1(M) = \{\varphi \in L(M) \mid M \models \varphi, \text{ i } \varphi \text{ és universal}\}$$

L'expansió natural de M a $L(M)$ la denotarem M_M si volem fer èmfasi el l'expansió o senzillament M si no es presta a confusió. Si $M \subseteq N$ també N té una expansió natural a $L(M)$, que denotarem per N_M si volem fer èmfasi en l'expansió. També farem servir N_M per indicar una expansió qualsevol de N a $L(M)$.

Observació 1.3. Siguin M, N estructures del mateix llenguatge L .

1. N_M és model de $D(M)$ sii l'aplicació $M \rightarrow N$ que envia $a \mapsto a^N$ (a^N indica la interpretació de a a N_M) és una immersió.
2. N_M és model de $\Delta(M)$ sii l'aplicació $a \mapsto a^N$ és una immersió elemental.
3. N_M és model de $\Delta_1(M)$ sii l'aplicació $a \mapsto a^N$ és una immersió existencialment tancada.

Així els models de $D(M)$, $\Delta(M)$ i $\Delta_1(M)$ són $L(M)$ -isomorfs a extensions de M , extensions elementals de M i extensions existencialment tancades de M respectivament.

Demostració. Exercici. □

Lema 1.4. $M \preceq_1 N$ sii existeix $M' \succ M$ tal que $N \subseteq M'$.

Demostració. La implicació de dreta a esquerra és fàcil. Recíprocament, si $M \preceq_1 N$, per la observació 1.3, n'hi a prou amb verificar que $\Delta(M) \cup D(N)$ és consistent. Però si $\Delta(M) \cup D(M)$ no fos consistent tindriem que, per compacitat, $\Delta(M) \models \neg\varphi(\bar{a}, \bar{b})$ per a una certa $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) \in D(N)$ (\bar{a} denota els paràmetres que estan a M i \bar{b} els de $N \setminus M$). Llavors $\forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}, \bar{x}) \in \Delta_1(M)$ i per tant $N \models \forall \bar{x} \neg\varphi(\bar{a}, \bar{x})$, contradicció amb $N \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. □

Farem servir la notació T_{\forall} per indicar totes les conseqüències universals de T , és a dir, $T_{\forall} := \{\varphi \in L \mid \varphi \text{ és un enunciat universal i } T \models \varphi\}$. De la mateixa manera $T_{\forall\exists}$ indicarà totes les conseqüències \prod_2 de T . Observem que ni T_{\forall} ni $T_{\forall\exists}$ són teories, però de manera informal les tractarem com si ho fossin (les confondrem amb el conjunt de les seves conseqüències lògiques). Així, per exemple, $T = T_{\forall}$ indicarà senzillament que T i T_{\forall} tenen els mateixos models (o equivalentment axiomatitzen la mateixa teoria). Observem que, amb aquesta notació, una teoria T admet un conjunt d'axiomes universals sii $T = T_{\forall}$.

Lema 1.5. Si T és una teoria qualsevol,

$$\text{Mod}(T_{\forall}) = \{M \mid M \subseteq M' \text{ per a algun } M' \in \text{Mod}(T)\}.$$

Així, T es preserva per subestructures sii T es pot axiomatitzar amb axiomes universals.

Demostració. Si M és model de T_{\forall} i demostrem que $D(M) \cup T$ és consistent, tenint en compte la observació 1.3 ja haurem acabat. Si $D(M) \cup T$ no fos consistent tindriem que $T \models \neg\varphi(\bar{a})$ per a una fórmula $\varphi(\bar{a}) \in D(M)$. Així $T \models \forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x})$ i per tant $\forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x}) \in T_{\forall}$. Com que M és model de T_{\forall} necessàriament $M \models \forall\bar{x}\neg\varphi(\bar{x})$, contradient el fet que $M \models \varphi(\bar{a})$. \square

Exercici 1.6. $T = T_{\exists}$ sii T es preserva per extensions. *Indicació:* Demostreu primer el resultat següent: Si Δ és un conjunt d'enunciats tancat per disjunció (n'hi ha prou amb que la disjunció de dues fórmules de Δ sigui equivalent a una fórmula de Δ) i T una teoria, llavors $T = T_{\Delta}$ sii donats $M \in \text{Mod}(T)$ i N tal que $M \xrightarrow{\Delta} N$ (tota Δ -fórmula que val en M també val en N) llavors N també és model de T .

Definició 1.7 (cadena, cadena elemental). Una *cadena d'estructures* és una col·lecció $\langle M_i \mid i \in \alpha \rangle$ tal que $M_i \subseteq M_j$ sempre que $i < j < \alpha$. Quan en els límits es prenen unions (és a dir, $M_i = \bigcup_{j < i} M_j$ per a tot $i < \alpha$ límit) es diu que la cadena és *contínua*. La unió de la cadena, que denotarem per

$$\bigcup_{i \in \alpha} M_i,$$

és la L -estructura que té per domini la unió dels dominis i els símbols s'interpreten també prenent la unió de les seves interpretacions: si S és un símbol de funció o relació,

$$S^{\bigcup_{i \in \alpha} M_i} = \bigcup_{i \in \alpha} S^{M_i}.$$

Els símbols de constant els tractem com símbols de funció d'arietat 0, i la unió està presa pensant en els seus grafs. En el cas de símbols de funció la unió és una funció perquè les estructures formen una cadena. És fàcil verificar que cada M_i és subestructura de la unió. Una *cadena elemental* és una cadena $\langle M_i \mid i \in \alpha \rangle$ on $M_i \preceq M_j$ per a tot $i < j < \alpha$.

Lema 1.8 (lema de la cadena). *Si la cadena $\langle M_i \mid i \in \alpha \rangle$ és elemental, llavors cada M_i és subestructura elemental de la unió:*

$$M_i \preceq \bigcup_{i \in \alpha} M_i.$$

Demostració. \square

Proposició 1.9. $T = T_{\forall\exists}$ sii T es preserva per unions de cadenes.

Demostració. Per fer la implicació d'esquerra a dreta només cal verificar que la unió d'una cadena satisfà tots els enunciats \prod_2 que valen en tots els models de la cadena. Recíprocament, suposem que T és tancat per unions de cadenes. Cal provar que $\text{Mod}(T_{\forall\exists}) \subseteq \text{Mod}(T)$. Sigui M un model de T . Anem a veure que $T \cup \Delta_1(M)$ és consistent. Altrament tindriem que $T \models \neg\varphi(\bar{a})$ amb $\varphi(\bar{a}) \in \Delta_1(M)$, i per tant $T \models \forall x\neg\varphi(\bar{x})$. Ara bé, $\forall x\neg\varphi(\bar{x})$ és un enunciat \prod_2 que és

conseqüència de T , per tant val a M . Però això contradiu el fet que $M \models \varphi(\bar{a})$. De la consistència de $T \cup \Delta_1(M)$ deduïm, tenint en compte la observació 1.3, que existeix un model N_1 de T tal que $M \preceq_1 N_1$. Ara, pel lema 1.4 existeix M_1 tal que $M \preceq M_1$ i $N_1 \subseteq M_1$. De la mateixa manera existeixen M_2 i N_2 amb $M_1 \preceq M_2$ i $N_2 \subseteq M_2$ i N_2 és model de T . Repetint l'argument construïm una cadena elemental $\langle M_i \mid i \in \omega \rangle$ amb $M_0 = M$ i una cadena $\langle N_i \mid i \geq 1 \rangle$ de models de T tal que $N_i \subseteq M_i$. Ara, pel lema 1.8 $M \preceq \bigcup_{i \in \omega} M_i$. Però $\bigcup_{i \in \omega} M_i = \bigcup_{i \geq 1} N_i$, que és model de T per ser T tancat per unions de cadenes. així M també és model de T . \square

Definició 1.10 (model completa). Una teoria T és model-completa si $M \subseteq N$ implica $M \preceq N$ sempre que M i N són models de T .

Observació 1.11. Tota teoria T model completa es pot axiomatitzar amb axiomes \prod_2 .

Demostració. Pel lema de la cadena de Tarski 1.8, T es preserva per unions de cadenes i per la proposició 1.9 tenim que $T = T_{\forall}$. \square

Teorema 1.12. *Suposem que λ és un cardinal més gran o igual que el del llenguatge de la teoria T . Són equivalents:*

1. T és model completa.
2. Per a tot model M de T , $T \cup D(M)$ és completa.
3. (Test de Robinson) Per a qualssevol M, N models de T tals que $M \subseteq N$ es té que $M \preceq_1 N$.
4. (a) Per a qualssevol M, N models de T de cardinal λ tals que $M \subseteq N$ es té que $M \preceq_1 N$.
(b) cap model finit de T té extensions pròpies a models de T .
5. Tota fórmula existencial és equivalent, mòdul T , a una universal.
6. Tota fórmula és equivalent, mòdul T , a una universal.

Demostració. Veurem $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Per ser T model-completa tenim que tot model de $T \cup D(M)$ és model del $\Delta(M)$ i per tant $T \cup D(M) = \Delta(M)$.

$2 \Rightarrow 3$. Si M i N són models de T tals que $M \subseteq N$, tant M com N són models de $T \cup D(M)$. Per completesa han de ser $L(M)$ -elementalment equivalents. És a dir, $M \preceq N$.

$3 \Rightarrow 4$. Només cal provar (b). Però si M és un model finit de T , posem $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, llavors, per 3, la fórmula $\forall x(x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n)$ ha de valer en qualsevol extensió de M que sigui model de T .

$4 \Rightarrow 5$. Sigui $\varphi = \varphi(\bar{x})$ una fórmula existencial i considerem

$$\Sigma(\bar{x}) := \{\psi(\bar{x}) \mid \psi(\bar{x}) \text{ universal, } T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})\}.$$

Un argument de compacitat redueix el problema a demostrar que

$$T \cup \Sigma(\bar{x}) \models \varphi(\bar{x}).$$

Sigui (M, \bar{a}) un model de $T \cup \Sigma(\bar{x})$, hem de veure que $M \models \varphi(\bar{a})$.

Afirmació. Si M és un model de $T \cup \Sigma(\bar{x})$ llavors $D(M) \cup T \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ és consistent.

Demostració. Si no ho fos tindriem que per a una certs $\psi(\bar{a}, \bar{b}) \in D(M)$, $T \models \varphi(\bar{a}) \rightarrow \neg\psi(\bar{a}, \bar{b})$. Però llavors $T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \forall y \neg\psi(\bar{x}, \bar{y})$. Així $\forall y \neg\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Sigma(\bar{x})$ i per tant $M \models \forall y \neg\psi(\bar{a}, \bar{y})$, contradient que $M \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$. \square

Ara Distingim tres casos segons el cardinal de M . Si M és finit, tenint en compte (b) i l'afirmació, podem concloure que $M \models \varphi(\bar{a})$. Si el cardinal de M és més petit o igual que el de λ , prenem M' una extensió elemental de M de cardinal λ . Ara, per l'afirmació, $D(M') \cup T \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ té un model de cardinal λ . Per 4 (a), $\varphi(\bar{a})$ val a M' i per tant a M . Si el cardinal de M és més gran que λ fem un raonament anàleg amb M' , on ara $\bar{a} \in M' \preceq M$ (existeix per Löwenheim-Solem-Tarski).

$5 \Rightarrow 6$. Es fa per inducció sobre la fórmula. Podem suposar que conté només les connectives $\vee, \forall x, \neg$. En els dos primers casos és evident i per a la negació usem la hipòtesi 5.

$6 \Rightarrow 1$ és evident. \square

Definició 1.13. Una estructura M és *existencialment tancada* en una teoria T si M és existencialment tancada en tota extensió que sigui model de T .

Lema 1.14. Si $T = T_{\forall\exists}$, tot model M de T es pot estendre a un model de T existencialment tancat a T . Si M té cardinal més gran o igual que el del llenguatge, llavors podem aconseguir l'extensió del mateix cardinal que M .

Primer demostrem la següent:

Afirmació. Per a tot model M de T existeix un model M' de T , que estén M i tal que tota fórmula existencial $\varphi \in L(M)$ que val en algun model de T que estengui M' val en M' . Si a més M és de cardinal més gran o igual que el de L llavors podem aconseguir l'extensió M' del mateix cardinal que M .

Demostració. Sigui $\langle \varphi_i \mid i \in \lambda \rangle$ una enumeració de tots els enunciats existencials amb paràmetres a M . Construïm una cadena contínua (en els límits prenc unions) $\langle M_i \mid i \in \lambda \rangle$ de models de T de la manera següent. M_0 és M i M_{i+1} és qualssevol model de T de cardinal λ que estengui M_i on val φ_i . Si no hi ha un tal model fem $M_{i+1} := M_i$. Llavors és immediat verificar, usant Löwenheim-Skolem, que $\bigcup_{i \in \lambda} M_i$ és el model buscat. És model de T perquè T és tancat per unió de cadenes. \square

Ara construïm una ω -cadena $\langle M_i \mid i \in \omega \rangle$ de models de T així: $M_0 = M$ i M_{i+1} és un model obtingut aplicant l'afirmació. És clar que $\bigcup_{i \in \omega} M_i$ és el model buscat.

Corol·lari 1.15 (Test de Lindström). *Tota teoria sense models finits, categòrica en algun cardinal $\lambda \geq |L|$ i tancada per unions de cadenes és model completa.*

Demostració. Usem la caracterització 4 de 1.12. Com que no hi ha models finits, només cal verificar (b). Però pel lema 1.14 i λ -categoricitat, tot model de T de cardinal λ és existencialment tancat. Això és suficient. \square

Exemple 1.16. Usant el test de Lindström es pot veure que són model completes (també són completes pel test de Los-Vaught):

1. La teoria dels ordres lineals densos sense extrems.
2. La teoria de les àlgebres de Boole sense àtoms.
3. Les teories de (\mathbb{Z}, s) i $(N, 0, s)$. s indica la funció següent.
4. La teoria del random graf.
5. La teoria dels grups Abelianos divisibles lliures de torsió.
6. La teoria dels cossos algebraicament tancats de característica fixada.
7. La teoria dels grups Abelianos d'exponent p .

Les tres primeres són \aleph_0 -categòriques (i només en aquest cardinal), les tres següents són categòriques en cardinal no numerable (però no \aleph_0 -categòriques). La última és totalment categòrica (categòrica en tot cardinal).

Definició 1.17. Un *model algebraicament primer* de T és un model de T que es pot submergir (hi ha una immersió) en tot altre model de T . Un *model primer* de T és un model de T que es pot submergir elementalment en tot altre model de T .

Observació 1.18. Un model algebraicament primer d'una teoria model completa és primer. Si una teoria té model primer ha de ser completa, doncs el model primer és elementalment a tot altre. Així, si una teoria model completa té model algebraicament primer també és completa.

Exemple 1.19. Els 7 exemples anteriors tenen model algebraicament primer. Per exemple, el model algebraicament primer del cossos algebraicament tancats de característica fixa és la clausura algebraica del cos primer (que és \mathbb{Q} en característica zero i \mathbb{F}_p en característica $p > 0$).

Definició 1.20 (model consistència, model companion). Es diu que dues teories T, T' són *model consistentes* si tot model de T s'extén a un model de T' i a l'inrevés. Pel lema 1.5, la model consistència de T i T' és equivalent a $T_{\forall} = T'_{\forall}$.

La teoria T^* és un *model companion* de T si és model consistent amb T i model completa.

Proposició 1.21. *Tota teoria té com a molt un model companion.*

Demostració. Veiem que dues teories T i T' model consistents i model completes són iguals. N'hi ha prou amb veure que tot model M de T també és model de T' . Construïm una ω -cadena $\langle M_i \mid i \in \omega \rangle$ d'extensions de M , amb $M_0 = M$, M_{2i} model de T i M_{2i+1} model de T' . Això es pot fer per model consistència. Ara, per model completa, les cadenes $\langle M_{2i} \mid i \in \omega \rangle$ i $\langle M_{2i+1} \mid i \in \omega \rangle$ són elementals i tenen la mateixa unió que notem M_∞ . Pel lema de la cadena 1.8 $M_0 \preceq M_\infty \succ M_1$ i per tant M és model de T' . \square

Exemple 1.22. 1. La teoria dels ordres lineals densos sense extrems és el model companion de la teoria dels ordres totals.

2. La teoria de les àlgebres de Boole sense àtoms és el model companion de la teoria de les àlgebres de Boole.
3. La teoria del random graf és el model companion de tots els grafs.
4. La teoria dels grups Abelianos divisibles lliures de torsió és el model companion dels grups Abelianos lliures de torsió.
5. La teoria dels cossos algebraicament tancats és el model companion de la teoria dels dominis (anells commutatius i unitaris sense divisors de zero).

Usarem E_T per denotar els models de T_\forall que són existencialment tancats per T . També farem servir T^* per denotar el model companion, si existeix.

Observació 1.23. Quan hem demostrat el lema 1.9 hem provat que si T és una teoria qualsevol, llavors

$$\text{Mod}(T_{\forall\exists}) = \{M \mid \text{hi ha un } M' \in \text{Mod}(T) \text{ tal que } M \preceq_1 M'\}.$$

Així, $T = T_{\forall\exists}$ sii T és tancada per subestructures existencialment tancades, és a dir, si $M \preceq_1 N$ i N és model de T llavors també M és model de T .

El següent teorema dona una caracterització de quan una teoria té model companion.

Teorema 1.24. *Una teoria T té model companion sii E_T és una classe elemental². A més, si el model companion T^* existeix es té que $T^* = \text{Th}(E_T)$.*

Demostració. Comencem per la implicació d'esquerra a dreta. Si T té model companion T^* veiem que $E_T = \text{Mod}(T^*)$. Pel lema 1.4, tot model de T^* es existencialment tancat per T . D'altra banda, si M és un model de T_\forall existencialment tancat a T , per model-consistència, M està existencialment tancat a T^* . Com que T^* és model completa, tenint en compte les observacions 1.11 i 1.23 M ha de ser model de T^* .

Recíprocament, si E_T és elemental, llavors $\text{Th}(E_T)$ és el model companion. Clarament $\text{Th}(E_T)$ és model completa pel test de Robinson (caracterització 3 del teorema 1.12). Pel que fa a la model consistència, s'obté aplicant el lema 1.14 a T_\forall i observant que ser existencialment tancat per T i T_\forall és equivalent. \square

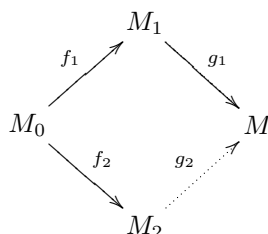
²És de la forma $\text{Mod}(\Sigma)$ per a un conjunt d'enunciats Σ . A vegades s'en diu una classe EC_Δ o Δ -elemental

En general, per trobar el model companion cal sortir de T i passar a T_{\forall} . Moltes vegades, però això no és necessari: Si $T = T_{\forall\exists}$, els models del model companion T^* són també models de T (en altres termes $T \subseteq T^*$). Això és conseqüència de la observació 1.23.

Definició 1.25 (Propietat d'amalgamació, Propietat de l'immersió comuna). 1.

Una teoria T té la J.E.P. (joint embedding property) si Si donats dos models M_1, M_2 de T existeix un tercer model M i immersions $f_i : M_i \rightarrow M$.

2. Una teoria T té la A.P. (Amalgamation property) si Si donats tres models M_0, M_1, M_2 de T i immersions $f_i : M_0 \rightarrow M_i$ (per $i = 1, 2$) existeix un quart model M i immersions $g_i : M_i \rightarrow M$ (per $i = 1, 2$) tals que $g_1 f_1 = g_2 f_2$. En diagrames:



Observació 1.26. Tota teoria completa té la J.E.P. De fet és cert el següent: dues estructures M_1, M_2 elementalment equivalents sempre tenen una extensió elemental comuna. Exercici: demostrar-ho. De la mateixa manera, tota teoria T model completa té la propietat d'amalgamació: observem que, per la caracterització 2 del teorema 1.12, $T \cup D(M)$ té la JEP per a tot M model de T . Però això últim és equivalent a la propietat d'amalgamació.

El següent corollari ens diu que li falta a una teoria model completa per ser completa.

Corollari 1.27. *Suposem que T és una teoria model completa. Llavors T és completa si i té la J.E.P.*

Demostració. Ja que les immersions entre models de T són elementals. □

Definició 1.28. Es diu que T' és la model completació de T si T' és el model companion i a més $D(M) \cup T'$ és completa per a tot M model de T .

Estem afegint una certa condició 'd'unicitat' al model companion. Observem que una teoria és model completa si i és la model completació de si mateixa.

Proposició 1.29. *Suposem que T^* és el model companion de T . Llavors:*

1. T^* és la model completació de T si i T té la A.P.
2. T^* és completa si i T té la J.E.P.

Demostració. Comencem per la demostració de 2, que és fàcil. Surt de 1.27 tenint en compte que si dues teories són model consistents i una té la J.E.P. l'altra també.

Suposem ara que T^* és la model completació de T i siguin M, M_1, M_2 models de T amb $f_i : M \rightarrow M_i$ immersions per $i = 1, 2$. Ara considerem N_i model de T^* tals que $M_i \subseteq N_i$. Com que la teoria $D(M) \cup T^*$ és completa, també té la J.E.P. Com que cada $(N_i)_M$ és model de la teoria $D(M) \cup T^*$, existeix N_M model de $D(M) \cup T^*$ i $h_i : (N_i)_M \rightarrow N_M$. Però $g_1 f_1 = g_2 f_2$ ja que h_1, h_2 eren $L(M)$ -immersions. Ara només cal estendre N a un model de T .

Recíprocament, suposem que T té la A.P., que M és model de T i que $(N_i)_M$ són models de $D(M) \cup T^*$. Hem de veure que $(N_1)_M \equiv (N_2)_M$. Notem per f_i l'aplicació de M a N_i definida per $a \mapsto a^{N_i}$ i estenem N_i a un model M_i de T . Com que T té la A.P. existeix un model M' de T i h_i immersions de M_i en M' tals que $g_1 f_1 = g_2 f_2$. Finalment estenem M' a un model N de T^* . Aquest model N s'expandeix a un model de $D(M)$ usant la immersió $g_1 f_1$ (que és la mateixa que $g_2 f_2$). Per model completa $(N_i)_M \equiv N_M$ i per tant $(N_1)_M \equiv (N_2)_M$. \square

Definició 1.30 (Eliminació de Quantificadors). Es diu que una teoria T té Eliminació de Quantificadors si per a tota fórmula $\varphi(\bar{x})$ existeix una fórmula $\psi(\bar{x})$ sense quantificadors tal que $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$.

Observem que, per inducció n'hi ha prou amb demostrar que tota fórmula que té un sol quantificador és equivalent, mòdul la teoria, a una sense quantificadors. També és obvi que si una teoria elimina quantificadors és model completa. L'enunciat següent diu que cal afegir a model completa per a obtenir eliminació de quantificadors.

Teorema 1.31. *Si T és una teoria qualsevol, són equivalents:*

1. T admet Eliminació de Quantificadors.
2. T és la model completació de T_\forall .
3. T és model completa i T_\forall té la A.P.

Demostració. L'equivalència entre 2 i 3 surt del punt 2 de la prop 1.29.

$1 \Rightarrow 2$. Òbviament T és el model companion de T_\forall . Si M és model de T_\forall i $(N_i)_M$ són models de $D(T) \cup T$, tenim immersions $f_i : M \rightarrow N_i$ donades per la interpretació de les constants de M . Per E.Q. és fàcil verificar que $(N_1)_M \equiv (N_2)_M$.

$2 \Rightarrow 1$. Sigui $\varphi(\bar{x})$ una fórmula qualsevol i considerem

$$\Sigma(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) \mid \psi(\bar{x}) \text{ no té quantificadors i } T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})\}.$$

Compacitat redueix el problema a provar que $T \cup \Sigma(\bar{x}) \models \varphi(\bar{x})$. Sigui M un model de T i $\bar{a} \in M$ tal que $\bar{a} \models \Sigma(\bar{x})$. Llavors la subestructura N de M engendrada per \bar{a} és model de T_\forall . Observem que el domini de N és $\{t(\bar{a}) \mid t \text{ terme de } L\}$. Així tota fórmula amb paràmetres a N la podem escriure

com una fórmula amb paràmetres \bar{a} . Ara, $T \cup D(N) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ és consistent, altrament tindriem que $T \models \varphi(\bar{a}) \rightarrow \neg\psi(\bar{a})$ per a una certa fórmula $\psi(\bar{a}) \in D(N)$. Així $T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \neg\psi(\bar{x})$ i per tant $\neg\psi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$, contradient que $N \models \Sigma(\bar{a})$. Com que $T \cup D(N)$ és completa per hipòtesi ja tenim $T \cup D(N) \models \varphi(\bar{a})$ i per tant $M \models \varphi(\bar{a})$. \square