
Solució de l'examen final de Lògica

F. M. E.

25/01/2005

Problemes Resolts

Problema 1. Considerem una successió de teories Γ_n , $n \geq 0$, tal que Γ_n està continguda estrictament a Γ_{n+1} , i indiquem-ne per Γ la reunió.

- Proveu que Γ és una teoria consistent (i.e., és tancat per conseqüència lògica i existeix una fórmula ϕ tal que $\phi \notin \Gamma$).
- Demostreu que $\text{Mod}(\Gamma)$ no és una classe elemental.
- Si $\psi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \approx x_j)$, per a $n \geq 1$, proveu que $\text{Mod}(\bigcup_{n \geq 1} \{\psi_n\})$ no és elemental.

Solució:

- Comencem veient que Γ és una teoria: si $\Gamma \models \varphi$, per compacitat hi ha un subconjunt finit $\bar{\Gamma}$ de Γ tal que $\bar{\Gamma} \models \varphi$. Com que $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, i els Γ_n són creixents, hi ha un cert Γ_n que conté $\bar{\Gamma}$ i per tant $\Gamma_n \models \varphi$. Com que Γ_n és una teoria, $\varphi \in \Gamma_n \subseteq \Gamma$ i per tant $\varphi \in \Gamma$.

Ara provem que Γ és consistent. N'hi ha prou amb veure que tota part finita ho és. Ara bé, tota part finita $\bar{\Gamma}$ de Γ està continguda en algun Γ_n que és consistent per hipòtesi.

- Si $\text{Mod}(\Gamma)$ fos elemental tindríem que $\text{Mod}(\Gamma) = \text{Mod}(\varphi)$ per a un cert enunciat φ . Llavors $\Gamma \models \varphi$ (perquè $\text{Mod}(\Gamma) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$) i per tant $\varphi \in \Gamma$. Com que Γ és la reunió dels Γ_n resulta que $\varphi \in \Gamma_n$ per a un cert n . Veiem ara que $\Gamma_n = \Gamma_m$ per a tot $m \geq n$, contradint la hipòtesi que la successió de teories és estrictament creixent. Si $\psi \in \Gamma_m$ també $\psi \in \Gamma$, i com que $\text{Mod}(\Gamma) \supseteq \text{Mod}(\varphi)$ resulta que $\varphi \models \psi$. Llavors $\Gamma_n \models \psi$ i, com que és teoria, $\psi \in \Gamma_n$.

- c) Apliquem l'apartat anterior a les teories $T_n := \text{Th}(\text{Mod}(\psi_n))$, la teoria axiomatitzada per ψ_n . Només cal veure que T_n està estrictament continguda a T_{n+1} . Que T_n està continguda a T_{n+1} surt del fet que $\text{Mod}(T_{n+1}) \subseteq \text{Mod}(T_n)$, o equivalentment $\psi_{n+1} \models \psi_n$. La inclusió recíproca no és certa, doncs hi ha models de ψ_n que no són models de ψ_{n+1} : qualsevol conjunt que tingui exactament n elements.

Problema 2. Considerem Γ la teoria axiomatitzada per les fórmules següents:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y (fx \approx fy \rightarrow x \approx y), \\ &\forall x \exists y (fy \approx x), \\ &\forall x (\neg f^n x \approx x) \quad (n > 0). \end{aligned}$$

- a) Demostreu que Γ és consistent.
- b) Demostreu que Γ és λ -categòrica en tot cardinal λ no numerable. (*Indicació: si M és un model de Γ considereu la relació d'equivalència en el domini de M següent: Si $a, b \in M$, $a \sim b$ sii $(f^M)^n(a) = b$ per a algun $n \in \mathbb{Z}$. Això us ajudarà a obtenir una descripció útil de l'estructura M .)*
- c) Demostreu que Γ és completa.

Solució:

- a) Pel teorema de completesa, n'hi ha prou amb veure que te un model. És fàcil verificar que els enters amb la funció següent $((\mathbb{Z}, s)$, on $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida per $s(n) = n + 1$) és un model de Γ .
- b) La idea de la demostració és que un model qualsevol es una reunió de ' \mathbb{Z} -cadenes', és a dir, de còpies isomorfs als enters amb la funció següent. Com que cada ' \mathbb{Z} -cadena' és numerable, el cardinal del model coincideix amb el nombre de \mathbb{Z} -cadenes (si el model és no numerable) i per tant dos models no numerables del mateix cardinal ténen el mateix nombre de ' \mathbb{Z} -cadenes' i llavors són isomorfs. Veiem-ho en detall. Sigui M és un model de Γ i considereu la relació d'equivalència en el domini de M següent: Si $a, b \in M$, $a \sim b$ sii $(f^M)^n(a) = b$ per a algun $n \in \mathbb{Z}$. És fàcil verificar que és relació d'equivalència. Per exemple, si $a \sim b$ i $b \sim c$ resulta que $(f^M)^n(a) = b$ i $(f^M)^m(b) = c$ per uns certs enters n, m . Llavors $(f^M)^{n+m}(a) = c$ i per tant $a \sim c$. Les classes d'equivalència de la relació són de la forma $\{(f^M)^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ per a un cert $a \in D_M$ (d'ara en endavant les \mathbb{Z} -cadenes). Observem que les classes d'equivalència de D_M / \sim són numerables i per tant si μ denota el nombre de classes, λ el cardinal de M i $\lambda > \aleph_0$ tenim que $\lambda = \mu \cdot \aleph_0$, d'on μ ha de ser no numerable i $\lambda = \mu \cdot \aleph_0 = \mu$. És a dir, M te el mateix nombre d'elements que de \mathbb{Z} -cadenes (quan M és no numerable).

Suposem ara que tenim dos models M, N de Γ del mateix cardinal $\lambda > \aleph_0$. Com que el nombre de \mathbb{Z} -cadena en M i N es λ , les podem indexar pel mateix conjunt I (de cardinal λ). Si triem, per l'axioma d'elecció, un element a_i , de cada \mathbb{Z} -cadena de M , podem suposar que els elements $(a_i \mid i \in I)$ estan en \mathbb{Z} -cadena diferents. Això ens diu que

$$D_M = \{(f^M)^n(a_i) \mid (n, i) \in \mathbb{Z} \times I\},$$

on tots aquests elements són diferents (si $(f^M)^n(a_i) = (f^M)^m(a_j)$ llavors $(n, i) = (m, j)$). Si fem el mateix amb N obtenim

$$D_N = \{(f^N)^n(b_i) \mid (n, i) \in \mathbb{Z} \times I\},$$

on tots aquests elements també són diferents.

Ara prenem l'aplicació $h : D_M \rightarrow D_N$ definida per $h((f^M)^n(a_i)) = (f^N)^n(b_i)$ i comprovem que és un isomorfisme. Òbviament és bijectiva. Per tal de veure que és un homomorfisme només hem de verificar que preserva f , és a dir, $h(f^M(a)) = f^N(ha)$ per a tot $a \in D_M$. Com que $a = (f^M)^n(a_i)$ per un cert $(n, i) \in \mathbb{Z} \times I$, això es redueix a $h(f^M((f^M)^n(a_i))) = f^N((f^N)^n(b_i))$. Això últim diu que $h((f^M)^{n+1}(a_i)) = (f^N)^{n+1}(b_i)$, que és cert per la manera en que hem definit h .

- c) Com que Γ és consistent i categòrica en els cardinals no numerables, pel test de Los-Vaught, Γ és completa.

Problema 3. A la signatura $S = \{\leq\}$, considerem les tres estructures següents:

$$M_1 := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq) \quad M_2 := (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \leq) \quad M_3 := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq).$$

El producte indica que el domini és el producte cartesià i l'ordre és l'ordre lexicogràfic. Observeu que a cada M_i cada element té 'següent' per l'ordre. A la funció següent la denotem informalment per s .

- a) Construïu S -fórmules $\psi(x)$ i $\varphi_n(x, y)$ ($n \geq 0$) que expressin 'x no té anterior' i ' $y = s^n(x)$ ' respectivament.
- b) Demostreu que per a cada $n \in \mathbb{N}$, a M_2 el conjunt de la forma

$$A_n := \{(u, n) \mid u \in \mathbb{Z}\}$$

és definible (amb una variable lliure), mentre que els de la forma

$$B_n := \{(n, u) \mid u \in \mathbb{N}\}$$

no ho són.

- c) Demostreu que a M_3 els únics conjunts definibles (amb una variable lliure) són \emptyset i M_3 .
- d) Demostreu que a M_1 tots els conjunts formats per un sol element (i per tant tots els conjunts finits) són definibles (amb una variable lliure).

Nota: El 0 és natural. Useu la notació $x < y$ per a denotar $x \leq y \wedge \neg x \approx y$ lliurement. Useu les fórmules de l'apartat a) als apartats b) i d).

Solució:

- a) Per exemple, la primera la podem escriure:

$$\psi(x) := \forall y(y < x \rightarrow \exists z(y < z \wedge z < x)).$$

Podem expressar que ' $y = s^n(x)$ ' dient que hi ha exactament $n-1$ elements situats 'entre' x i y :

$$\exists z_1 \dots z_{n-1} \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} (x < z_i \wedge z_i < y) \wedge \forall z \left((x < z \wedge z < y) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n-1} z = z_i \right) \right).$$

En el cas en que $n = 0$ la fórmula $\varphi_0(x, y)$ és $x \approx y$ i en el cas en que $n = 1$ la fórmula $\varphi_1(x, y)$ és $x < y \wedge \forall z((x \leq z \wedge z \leq y) \rightarrow (z \approx x \vee z \approx y))$.

- b) El conjunt A_n està format pels elements que són de la forma $s^n(a)$ amb a sense anterior; i.e., una fórmula que defineix A_n és la següent:

$$\varphi(x) := \exists y(\psi(y) \wedge \varphi_n(y, x)).$$

La funció $g_r : M_2 \mapsto M_2$ definida per $g_r(a, b) = (a + r, b)$ és un automorfisme. Només cal verificar que preserva l'ordre i és bijectiva (el seu invers és g_{-r}). Així sempre hi ha un automorfisme que envia (a, b) a (c, b) (per a qualssevol a, b, c). Com que els automorfismes preserven els conjunts definibles, això diu que si un conjunt definible conté l'element (a, b) també ha de contenir tots els elements de la forma (c, b) (sigui qui sigui a i b). Això demostra que B_n no és definible.

- c) La funció $g_{(r,s)} : M_3 \mapsto M_3$ definida per $g_{(r,s)}(a, b) = (a + r, b + s)$ és un automorfisme. Només cal verificar que preserva l'ordre i és bijectiva (el seu invers és $g_{(-r,-s)}$). Així sempre hi ha un automorfisme que envia (a, b) a (c, d) (per a qualssevol a, b, c, d). Com que els automorfismes preserven els conjunts definibles, això diu que si un conjunt definible conté un element llavors els ha de contenir tots. Altrament dit: no hi ha més conjunts definibles que el buit i M_3 .
- d) Primer observem que l'element $(n, 0)$ es caracteritza per la següent propietat: hi ha exactament n elements menors o igual que ell que no tenen

anterior. A més l'element (n, m) és el m -següent del $(n, 0)$. Tot plegat ens proporciona la següent fórmula per a definir l'element (n, m) :

$$\exists z_1 \dots z_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \psi(z_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} (z_i < z_{i+1}) \wedge \forall z (z \leq z_n \wedge \psi(z) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n z = z_i) \wedge \varphi_m(z_n, x) \right).$$

Si podem definir cada element (cada subconjunt format per un sol element), podem definir un subconjunt finit prenent la disjunció (finita) de les fórmules que defineixen cada un dels elements d'aquest conjunt: Si S és un subconjunt finit de D_M i $\varphi_a(x)$ defineix l'element $a \in D_M$ llavors la fórmula

$$\bigvee_{a \in S} \varphi_a(x)$$

defineix el conjunt S .