

Apunts de Teoria de Models  
(en construcció)

Rafel Farré i Cirera

2 de maig de 2007



# Índex

<b>1 Preliminars</b>	<b>5</b>
1.1 Els Teoremes de Compacitat i Löwenheim-Skolem . . . . .	6
1.2 Teories completes: el test de Loš-Vaught . . . . .	7
1.3 Immersions i cadenes elementals . . . . .	9
1.4 Diagrames . . . . .	12
<b>2 Saturació</b>	<b>15</b>
2.1 Tipus . . . . .	15
2.2 Saturació . . . . .	17
2.3 Aplicacions elementals parcials . . . . .	19
2.4 Més sobre saturació . . . . .	20
2.5 Eliminació de quantificadors . . . . .	21
<b>3 Isomorfia Parcial</b>	<b>23</b>
3.1 Isomorfia parcial . . . . .	23
3.2 El teorema de Karp . . . . .	25
3.3 Isomorfia parcial i completesa . . . . .	26
3.4 Isomorfia parcial i eliminació de quantificadors . . . . .	27
<b>4 Omitting Types</b>	<b>31</b>
4.1 A little bit of topology . . . . .	31
4.2 The Baire category theorem . . . . .	32
4.3 The spaces of types . . . . .	32
4.4 The omitting types theorem . . . . .	33
<b>5 Countable models</b>	<b>37</b>
5.1 prime and atomic models . . . . .	37
5.2 countable saturated models . . . . .	39
5.3 The Ryll-Nardewski-Svenonius theorem . . . . .	39
5.4 on the number of countable models . . . . .	39



# Capítol 1

## Preliminars

Durant tot el curs treballarem amb conjunts de fórmules  $\Sigma$  d'un determinat llenguatge. Denotarem per  $L$  el llenguatge o, més precisament, el conjunt de símbols. Habitualment les fórmules seran tancades (sense variables lliures) i en direm *enunciats*. El cardinal de  $L$ , que denotarem per  $|L|$ , indica el nombre de símbols de  $L$  (de constant, de funció i de relació). Si treballem amb un conjunt numerable de variables hi ha  $|L| + \aleph_0$  fórmules. Moltes vegades treballarem amb dos llenguatges:  $L$  i una extensió seva  $L'$  (és a dir, tot símbol de  $L$  també ho és de  $L'$ ), cosa que denotem per  $L \subseteq L'$ . En aquest cas tota  $L'$ -estructura  $M'$  es converteix en una  $L$ -estructura  $M$  de manera natural oblidant la interpretació dels símbols de  $L' - L$ . En aquest cas direm que  $M$  és la *restricció* de  $M'$  a  $L$  i si cal ho denotarem per  $M = M' \upharpoonright L$ . També direm que  $M'$  és una *expansió* de  $M$  a  $L'$ .

Habitualment farem servir la mateixa lletra  $M, N, \dots$  per indicar l'estructura i el seu domini. El cardinal de l'estructura és el cardinal del seu domini i el denotarem per  $|M|$ . Una tupla  $\bar{a}$  de  $M$  és una seqüència finita  $a_1, \dots, a_n$  d'elements del domini de  $M$ , i ho indicarem informalment posant  $\bar{a} \in M$ . La longitud de la tupla  $a_1, \dots, a_n$  és  $n$ .

Per a una fórmula  $\varphi$ , quan escrivim  $\varphi(\bar{x})$  volem indicar que  $\bar{x}$  és una tupla de variables i les variables lliures de  $\varphi$  estan entre les de  $\bar{x}$ . Si  $\bar{a}$  és una tupla de  $M$  escriurem  $M \models \varphi(\bar{a})$  per indicar que en  $M$  val la fórmula  $\varphi$  quan assignem les variables de la tupla  $\bar{x}$  als elements de la tupla  $\bar{a}$  ordenadament (assignem  $x_i$  a  $a_i$  per a cada  $i$ ). Quan usem aquesta notació estarem suposant que  $\bar{x}$  i  $\bar{a}$  tenen la mateixa longitud encara que no es digui explícitament. Si  $t$  és un terme  $t(\bar{x})$  també indicarem que les variables de  $t$  estan entre les de  $\bar{x}$ . Si  $M$  és una estructura i  $\bar{a}$  és una tupla d'elements de  $M$  de la mateixa longitud que  $\bar{x}$ , indicarem per  $t^M(\bar{a})$  o simplement  $t(\bar{a})$  la interpretació de  $t$  a  $M$  quan assignem  $x_i$  a  $a_i$ .

## 1.1 Els Teoremes de Compacitat i Löwenheim-Skolem

El nostre punt de partida són els teoremes de compacitat i Löwenheim-Skolem descendent, que anunciem sense demostració.

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Compacitat, primera versió). *Donat un conjunt de fórmules  $\Sigma$  i una fórmula  $\varphi$  llavors:*

$$\Sigma \models \varphi \text{ si i hi ha un subconjunt finit } \Sigma_0 \text{ de } \Sigma \text{ tal que } \Sigma_0 \models \varphi$$

Una *teoria* és un conjunt d'enunciats tancat per conseqüència lògica. És habitual denotar una teoria per  $T$ . Observem que per a una teoria  $T$ ,  $\varphi \in T$  i  $T \models \varphi$  és el mateix. Tot conjunt d'enunciats  $\Sigma$  determina una teoria: el conjunt de les seves conseqüències lògiques  $\text{Th}(\Sigma) := \{\varphi \mid \varphi \text{ és un enunciat i } \Sigma \models \varphi\}$ . En aquest cas diem que  $\Sigma$  axiomatitza  $T$ . Observem que  $\Sigma$  i  $\text{Th}(\Sigma)$  tenen els mateixos models. Molts cops, de manera informal, parlarem de la 'teoria'  $\Sigma$  per referir-nos a  $\text{Th}(\Sigma)$ .

*Exercici 1.1.2.* Sigui  $T$  una teoria i  $\Sigma$  un conjunt d'enunciats. Demostrea que son equivalents:

1.  $\text{Th}(\Sigma) = T$ .
2.  $T$  i  $\Sigma$  tenen els mateixos models.

El teorema de compacitat també es pot enunciar així:

**Teorema 1.1.3** (Teorema de Compacitat, segona versió). *Tot conjunt de fórmules finitament satisfactibles és satisfactible.*

Si ens limitem a treballar amb enunciats, obtenim, en particular:

**Corol·lari 1.1.4.** *Una teoria té models si i només si tota part finita en té.*

*Exercici 1.1.5.* 1. Demostreu que es pot obtenir fàcilment qualsevol de les dues versions del teorema de compacitat usant l'altra.

2. Demostreu que del corol·lari 1.1.4 s'en pot obtenir el Teorema de Compacitat.

El Teorema de Löwenheim-Skolem descendent ve a continuació. Encara que també es cert per fórmules en general (convenientment formulat) el donem per a enunciats.

**Teorema 1.1.6.** *Si una teoria té models, llavors també té models de cardinal com a molt  $|L| + \aleph_0$ .*

Una conseqüència fàcil del teorema de Löwenheim-Skolem descendent usant compacitat, és el teorema de Löwenheim-Skolem ascendent.

**Teorema 1.1.7** (Löwenheim-Skolem ascendent). *Si una Teoria té models infinits llavors té models en tots els cardinals més grans o iguals que  $|L| + \aleph_0$ .*

*Demostració.* Suposem que  $M$  és un models infinit de  $T$  i sigui  $\lambda$  un cardinal qualsevol,  $\lambda \geq |L| + \aleph_0$ . Prenem un conjunt  $C$  de noves constants de cardinal  $\lambda$  i considerem la teoria:

$$\Sigma := T \cup \{a \neq b \mid a, b \text{ son dues constants diferents de } C\}.$$

Tota part finita de  $\Sigma$  es realitza en una expansió de  $M$  interpretant les noves constants adequadament. Per compacitat  $\Sigma$  té un model i, per Löwenheim-Skolem descendent en te un, posem  $M$ , de cardinal com a molt  $\lambda + |L| + \aleph_0 = \lambda$ . Però com que les  $\lambda$  diferents constants s'han d'interpretar com elements diferents resulta que  $M$  té cardinal  $\lambda$ . La restricció de  $M$  a  $L$  ens dona un models de  $T$  de cardinal  $\lambda$ .  $\square$

De fet, la demostració ens dóna una miqueta més del que hem enunciat. També obtenim la mateixa conclusió si la teoria té models finits arbitràriament grans (més exactament, si el conjunt de cardinals dels models finits no estan fitats).

El teorema de Löwenheim-Skolem ascendent ens diu que els conjunt de cardinals infinit on una teoria numerable té models és o buit o el total (Què passa si el cardinal és no numerable?). A l'exercici següent veurem que per als cardinals finits això és radicalment diferent.

*Exercici 1.1.8.* L'espectre finit d'una teoria  $T$  és el conjunt de cardinals finits on la teoria té models:  $\{n \in \omega \mid T \text{ té un model de cardinal } n\}$ . L'espectre finit pot ser força complicat. Construïu fórmules tals que el seu espectre finit sigui el següent:

1. Tots els nombres múltiples d'un natural  $n$  fix.
2. el conjunt dels nombres quadrats.
3. Tots els nombres no primers.
4. Totes les potències d'un nombre primer fixat  $p$ .
5. Qualsevol conjunt finit o cofinit de nombres naturals.

## 1.2 Teories completes: el test de Loš-Vaught

**Definició 1.2.1.** una teoria  $T$  és completa si per a tot enunciat  $\varphi$  tenim que  $T \models \varphi$  o  $T \models \neg\varphi$ .

L'exemple bàsic de teoria completa és la teoria d'una estructura:  $\text{Th}(M) = \{\varphi \mid \varphi \text{ és un enunciat i } M \models \varphi\}$ . De fet, a part de la teoria inconsistent que consta de tots els enunciats, no n'hi ha més: és fàcil de verificar que tota teoria completa i consistent és la teoria de qualsevol dels seus models.

**Definició 1.2.2.** Dues estructures  $M, N$  són elementalment equivalents,  $M \equiv N$  en símbols, si satisfan els mateixos enunciats, és a dir, tenen la mateixa teoria.

*Exercici 1.2.3.* Una teoria és completa si i només si tots els seus models són elementalment equivalents.

**Definició 1.2.4.** Sigui  $\lambda$  un cardinal infinit. Una teoria  $T$  es diu categòrica en  $\lambda$  o  $\lambda$ -categòrica si dos models qualssevol de  $T$  de cardinal  $\lambda$  són isomorfs.

La  $\lambda$ -categòricitat de  $T$  diu exactament que, llevat d'isomorfia,  $T$  té com a molt un model. Si  $T$  té models infinits i  $\lambda \geq |L| + \aleph_0$ , per Löwenheim-Skolem ascendent hi ha d'haver un sol model llevat d'isomorfia.

*Exercici 1.2.5.* 1. Demostreu que si  $M$  i  $L$  són finits, hi ha un enunciat  $\varphi_M$  que caracteritza  $M$  llevat d'isomorfia, és a dir, per a qualsevol  $N$ ,  $N$  és model de  $\varphi$  sii  $N$  és isomorf a  $M$ .

2. Demostreu que Si  $M$  és finit i  $N \equiv M$  llavors  $M$  i  $N$  són isomorfs (feu-ho primer per a  $L$  finit).

Observem que, per l'exercici precedent, si una teoria completa té models finits llavors de fet té un únic model (llevat d'isomorfia). Una qüestió força important és la de saber quan una teoria que no té models finits és completa. Un primer cas senzill és quan és categòrica en algun cardinal.

**Teorema 1.2.6** (test de Loš-Vaught). *Una teoria sense models finits i categòrica en algun cardinal més gran o igual que  $|L| + \aleph_0$  és completa.*

*Demostració.* Suposem que  $T$  és  $\lambda$ -categòrica, amb  $\lambda \geq |L| + \aleph_0$  i sense models finits. Veurem que dos models qualssevol  $M$  i  $N$  són elementalment equivalents. Considerem les teories de  $M$  i  $N$  respectivament. Per ser  $M$  i  $N$  infinits podem aplicar Löwenheim-Skolem ascendent i obtenim  $M'$  i  $N'$  elementalment equivalents a  $M$  i  $N$  respectivament de cardinal  $\lambda$ . Llavors  $M'$  i  $N'$  són dos models de  $T$  de cardinal  $\lambda$ , per tant isomorfs. Finalment  $M'$  i  $N'$  són elementalment equivalents, i per tant també  $M$  i  $N$ .  $\square$

*Exercici 1.2.7.* Demostreu que:

1. La teoria dels (purs) conjunts infinits:  $S = \emptyset$  i  $T$  és la teoria axiomatitzada per  $\{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .  $T$  és categòrica en qualsevol cardinal.
2. La teoria d'una relació d'equivalència amb infinites classes infinites és  $\aleph_0$ -categòrica però no és categòrica en cap altre cardinal infinit.
3. La Teoria del cossos algebraicament tancats de característica fixada és categòrica en qualsevol cardinal no numerable, en canvi no és  $\aleph_0$ -categòrica. Això és clar utilitzant el criteri de Steinitz per a isomorfia de cossos algebraicament tancats.
4. Si  $k$  és un cos finit, la teoria dels  $k$ -espais vectorials infinits és categòrica en qualsevol cardinal.

5. Si  $k$  és un cos infinit, la teoria dels  $k$ -espais vectorials infinits és categòrica només en cardinal no numerable.

Per 1.2.6, totes son teories completes.

*Exercici 1.2.8.* Sigui  $T$  una teoria i  $\Sigma$  un conjunt d'enunciats. Demostreu que:

1. Si  $\Sigma$  axiomatitza  $T$  i  $T$  és finitament axiomatitzable (té un conjunt finit d'axiomes) llavors existeix  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$  finit tal que  $\Sigma_0$  axiomatitza  $T$ .
2. Deduïu que cap de les teories de l'exercici precedent és finitament axiomatitzable.

Hem vist exemples de teories totalment categòriques, categòriques només en cardinal numerable, teories categòriques en tots els cardinals no numerables i teories completes que no són categòriques en cap cardinal. M. Morley va demostrar, l'any 1967?, que si una teoria numerable era categòrica en algun cardinal no numerable ho era en tots el cardinals no numerables alhora. És el conegut com a Teorema de Morley.

### 1.3 Immersions i cadenes elementals

**Definició 1.3.1 (immersions i subestructures).** Una *immersió* és una aplicació  $h : M \rightarrow N$  injectiva que satisfà les propietats següents:

1.  $h(a^M) = a^N$  per a tot símbol de constant  $a$ .
2.  $h(f^M(\bar{a})) = f^N(h(\bar{a}))$  per a tot símbol de funció  $f$  i tota tupla  $\bar{a}$  d'elements de  $M$  de la mateixa longitud que l'arietat de  $f$  ( $\bar{a}$  denota  $a_1, \dots, a_n$  i  $h(\bar{a})$  denota  $h(a_1), \dots, h(a_n)$ ).
3.  $\bar{a} \in R^M$  sii  $h(\bar{a}) \in R^N$  per a tota tupla  $\bar{a}$  de  $M$  i tot símbol de relació  $R$ .

Quan la identitat és una immersió de  $M$  en  $N$  es diu que  $M$  és una *subestructura* de  $N$  i ho denotarem per  $M \subseteq N$ .

Observem que una subestructura de  $N$  queda determinada per el seu domini, doncs la interpretació dels símbols de funció és la restricció de la interpretació a  $N$ . Els dominis  $D$  de les subestructures de  $N$  son els subconjunts de  $N$  'tancats per aplicació de funcionals' és a dir que satisfan:

1.  $a^N \in D$  per a tot símbol de constant  $a$ .
2.  $f^N(\bar{a}) \in D$  per a tota tupla  $\bar{a}$  de  $D$  i símbol funcional  $f^1$ .

Observem que si  $h : M \rightarrow N$  és una immersió,  $h(M)$  és el domini d'una subestructura de  $N$ , que denotarem també per  $h(M)$ , i  $h$  és una isomorfia de  $M$  en  $h(M)$ . Recíprocament, tota isomorfia de  $M$  en una subestructura de  $N$  es una immersió. És a dir, una immersió de  $M$  en  $N$  no és més que un isomorfisme de  $M$  en una subestructura de  $N$ .

<sup>1</sup>encara que no ho explicitem queda clar que la arietat de  $f$  i la longitud de  $\bar{a}$  han de ser iguals

*Exercici 1.3.2.* Demostreu que si  $h : M \rightarrow N$  és una immersió llavors hi ha una extensió  $M'$  de  $M$  ( $M$  és una subestructura de  $M'$ ) i una isomorfia  $h : M' \rightarrow N$  que extén  $h$ .

*Exercici 1.3.3* (teorema de l'homomorfisme). Sigui  $h$  una aplicació  $h : M \rightarrow N$ . Demostreu que:

1. Si  $h$  és immersió llavors per a cada terme  $t(\bar{x})$  del llenguatge es compleix que  $h(t^M(\bar{a})) = t^N(h(\bar{a}))$ .
2.  $h$  és una immersió si i només si preserva les fórmules sense quantificadors, és a dir, si  $\varphi(\bar{x})$  és una fórmula sense quantificadors, llavors

$$M \models \varphi(\bar{a}) \text{ si i només si } N \models \varphi(h(\bar{a})). \quad (1.3.1)$$

**Definició 1.3.4.** Una *immersió elemental* és una immersió que preserva totes les fórmules, és a dir, que satisfà (1.3.1) per a tota fórmula  $\varphi$ . En el cas en que la identitat és elemental direm que  $M$  és *subestructura elemental* de  $N$  i ho notarem per  $M \preceq N$ .

Si hi ha una immersió elemental de  $M$  en  $N$  llavors  $M$  i  $N$  són elementalment equivalents. Però no tota immersió entre estructures elementalment equivalents és elemental:  $(2\mathbb{Z}, <)$  és una subestructura de  $(\mathbb{Z}, <)$  que li és isomorfa, en canvi la fórmula  $\exists x(0 < x < 2)$  val en  $(\mathbb{Z}, <)$  però no en  $(2\mathbb{Z}, <)$ .

Observem que una immersió elemental de  $M$  en  $N$  és una isomorfia de  $M$  en una subestructura elemental de  $N$ .

*Exercici 1.3.5.* Demostreu que si  $h : M \rightarrow N$  és una immersió elemental llavors hi ha una extensió elemental  $M'$  de  $M$  ( $M$  és una subestructura elemental de  $M'$ ) i una isomorfia  $h : M' \rightarrow N$  que extén  $h$ .

Com que les subestructures (siguin o no elementals) queden determinades pel seu domini, dir que  $M$  és subestructura elemental de  $M$  o bé que  $M$  és el domini d'una subestructura elemental de  $M$  resulta equivalent.

**Teorema 1.3.6** (test de Tarski). *Sigui  $N$  una estructura i  $A$  un subconjunt de  $N$ . Llavors  $A$  és el domini d'una subestructura elemental de  $N$  si i només si per a tota fórmula  $\varphi(x, \bar{y})$  i tota tupla  $\bar{a}$  de  $A$  tal que  $N \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$  existeix un element  $b$  de  $A$  tal que  $N \models \varphi(b, \bar{a})$ .*

*Demostració.* La implicació d'esquerra a dreta és fàcil i la deixem pel lector. Per tal de veure el recíproc suposem que  $M$  verifica la condició de l'enunciat. Comencem veient que  $A$  és el domini d'una subestructura de  $N$  aplicant la condició de l'enunciat a la fórmula  $\exists x(x = f(\bar{y}))$ . A continuació veure, per inducció sobre  $\varphi(\bar{x})$  que per a tota tupla  $\bar{a}$  de  $M$  que  $M \models \varphi(\bar{a})$  si i només si  $M \models \varphi(\bar{a})$ . Per a les fórmules atòmiques està fet a l'exercici ?? Per la conjunció i la negació és un exercici mecànic. L'únic punt delicat és quan  $\varphi(\bar{x}) = \exists y \psi(y, \bar{x})$ . Si  $M \models \exists y \psi(y, \bar{a})$  llavors Si  $M \models \psi(b, \bar{a})$  per a un cert  $b$  de  $M$  i per tant  $N \models \psi(b, \bar{a})$  per hipòtesi d'inducció. Recíprocament, si  $N \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ , per hipòtesi, hi ha un  $b$  a  $M$  tal que  $N \models \psi(b, \bar{a})$ . Però llavors, per hipòtesi d'inducció,  $M \models \psi(b, \bar{a})$  i per tant  $M \models \exists y \psi(y, \bar{a})$ .  $\square$

El següent resultat és una millora el teorema de Löwenheim-Skolem descendent.

**Teorema 1.3.7** (Löwenheim-Skolem -Tarski). *Si  $A$  és un subconjunt de  $N$ , llavors existeix una subestructura elemental  $M$  de  $N$ , que conté  $A$  i de cardinal  $|M| \leq |A| + |L| + \aleph_0$ .*

*Demostració.* Per a cada fórmula  $\varphi(y, \bar{x})$  considerem una funció d'elecció  $F_\psi : N^n \rightarrow N$  (on  $n$  és la longitud de  $\bar{x}$ ) següent.

$$F(\bar{a}) = \begin{cases} b, & \text{si existeix un element } b \text{ de } N \text{ tal que } N \models \varphi(b, \bar{a}); \\ c, & \text{altrament.} \end{cases},$$

on  $c$  és un element de  $N$  prefixat qualssevol. Si  $M$  conté  $A$  i és tancat sota totes les aplicacions  $F_\psi$ , pel test de Tarski-Vaught 1.3.6  $M$  és subestructura elemental de  $N$ . Prenem  $M$  que sigui la clausura de  $A$  sota totes les funcions  $F_\psi$ . Això es fa amb una quantitat numerable de passos on comencem amb  $A_0 = A$  i prenem  $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{\psi \in L} F_\psi(A_n)$ . És clar que en tot moment  $|A_n| \leq |A| + |L| + \aleph_0$  i per tant si fem  $M = \bigcup_n A_n$ , també el cardinal de  $M$  està limitat per  $|A| + |L| + \aleph_0$ .  $\square$

**Definició 1.3.8 (cadena, cadena elemental).** Una *cadena d'estructures* és una col·lecció  $\langle M_i \mid i \in I \rangle$ , on  $(I, \leq)$  és totalment ordenat i tal que  $M_i \subseteq M_j$  sempre que  $i \leq j$ . Quan  $M_i$  és subestructura elemental de  $M_j$  sempre que  $i \leq j$  direm que és una *cadena elemental*.

Quan tenim una cadena d'estructures, es construeix l'estructura *unió de la cadena*, que denotarem per

$$\bigcup_{i \in I} M_i,$$

de la manera següent. El seu domini és la unió dels dominis i els símbols s'interpreten també prenent la unió de les seves interpretacions. Si  $f$  és un símbol de relació  $n$ -ari i  $\bar{a}$  és una  $n$ -tupla d'elements de  $\bigcup_{i \in I} M_i$ , prenem una  $M_j$  a la que hi pertanyin tots els elements de la tupla. Llavors definim  $f^{\bigcup_{i \in I} M_i}(\bar{a}) := f^{M_j}(\bar{a})$ . Per ser cadena, això no depèn de la  $M_j$  triada. Si  $R$  és un símbol de relació  $R^{\bigcup_{i \in \alpha} M_i} = \bigcup_{i \in \alpha} R^{M_i}$ . Els símbols de constant els tractem com símbols de funció d'arietat 0. És fàcil verificar que cada  $M_i$  és subestructura de la unió.

**Lema 1.3.9** (lema de la cadena). *Si la cadena  $\langle M_i \mid i \in I \rangle$  és elemental, llavors cada  $M_i$  és subestructura elemental de la unió:*

$$M_i \preceq \bigcup_{j \in I} M_j.$$

*Demostració.* Demostrem, per inducció sobre la fórmula  $\varphi(\bar{x})$ , que per a cada  $i$  i cada tupla  $\bar{a}$  de  $M_i$  es compleix que

$$M_i \models \varphi(\bar{a}) \text{ si i només si } \bigcup_{i \in I} M_i \models \varphi(\bar{a})$$

Per a les fórmules atòmiques ho sabem perquè  $M_i$  és subestructura. Els casos de la negació i la conjunció són trivials. Si  $\varphi(\bar{a}) = \exists x\psi(x, \bar{a})$ , de  $M_i \models \exists x\psi(x, \bar{a})$  en surt, per hipòtesi d'inducció que  $\bigcup_{i \in I} M_i \models \exists x\psi(x, \bar{a})$ . Recíprocament, si la fórmula  $\exists x\psi(x, \bar{a})$  val a  $\bigcup_{i \in I} M_i$  tenim que  $M_j \models \psi(b, \bar{a})$  per a un cert  $j \geq i$  i un cert  $b$  de  $M_j$ . Llavors de  $M_j \models \exists x\psi(x, \bar{a})$ , i com que la cadena és elemental  $M_j \models \exists x\psi(x, \bar{a})$ .  $\square$

Habitualment les cadenes d'estructures les indexarem en un ordinal  $\alpha$  i en els límits prenem unions (és a dir,  $M_i = \bigcup_{j < i} M_j$  per a tot  $i < \alpha$  límit). En aquest cas es diu que la cadena és *contínua*.

*Exercici 1.3.10.* Perquè una cadena contínua d'estructures (indexada en un ordinal) sigui elemental és suficient que cada  $M_i$  sigui subestructura elemental de  $M_{i+1}$ .

## 1.4 Diagrames

Ara considerarem expansions d'un d'un llenguatge  $L$  mitjançant constants. Si  $M$  és una  $L$ -estructura, expandirem  $L$  afegint una nova constant per a cada element de  $M$ . Per simplificar la notació usarem el mateix símbol per indicar la constant i l'element de  $M$  que designa. Ho denotarem per  $L(M)$ . L'expansió natural de  $M$  a una  $L(M)$ -estructura, on la constant  $m$  s'interpreta com a l'element  $m$  de  $M$ , la denotarem per  $M_M$ . Si  $N$  és una altra  $L$ -estructura i  $h$  una aplicació de  $M$  en  $N$  l'expansió de  $N$  a  $L(M)$  que interpreta  $m$  com  $h(m)$  la denotarem per  $(N, h)$ .

Tota fórmula tancada de  $L(M)$  s'obté per substitució de les variables  $\bar{x}$  per constants  $\bar{a}$  en una fórmula  $\varphi(\bar{x})$ , que denotarem  $\varphi = \varphi(\bar{a})$ . Amb aquesta notació  $M_M \models \varphi(\bar{a})$  sii  $M \models \varphi(\bar{a})$ . De la mateixa manera  $(N, h) \models \varphi(\bar{a})$  sii  $N \models \varphi(h(\bar{a}))$ .

El diagrama de  $M$  és el conjunt de  $L(M)$ -fórmules sense quantificadors que valen a  $M_M$ :

$$\text{Diag}(M) = \{\varphi \in L(M) \mid \varphi \text{ sense quantificadors } M_M \models \varphi\}.$$

El diagrama elemental de  $M$  és la teoria de  $M_M$ :

$$\Delta(M) = \{\varphi \in L(M) \mid M_M \models \varphi\}.$$

**Proposició 1.4.1.** *Siguin  $M, N$  dues  $L$ -estructures i  $h$  una aplicació de  $M$  en  $N$ .*

1.  *$h$  és una immersió de  $M$  en  $N$  si i només si  $(N, h)$  és un model de  $\text{Diag}(M)$ .*
2.  *$h$  és una immersió elemental de  $M$  en  $N$  si i només si  $(N, h)$  és un model de  $\Delta(M)$ .*

*Demostració.* Comencem demostrant 1, i suposem que  $h$  és immersió. Si  $\varphi(\bar{a}) \in \text{Diag}(M)$  resulta que  $M_M \models \varphi(\bar{a})$ ,  $M \models \varphi(\bar{a})$ , per 1.3.3  $N \models \varphi(h(\bar{a}))$  i per tant  $(N, h) \models \varphi(\bar{a})$ . Així  $(N, h)$  és model de  $\text{Diag}(M)$ . Recíprocament, si  $(N, h)$  és model de  $\text{Diag}(M)$ ,  $h$  és injectiva doncs  $a \neq b \in \text{Diag}(M)$  per cada parella d'elements  $a, b$  diferent de  $M$ . Si  $R$  és un símbol de relació i  $\bar{a}$  una tupla de  $M$  tenim que si  $\bar{a} \in R^M$  llavors  $R\bar{a} \in \text{Diag}(M)$  i per tant  $(N, h) \models R\bar{a}$  i  $N \models Rh(\bar{a})$ . Si  $\bar{a} \notin R^M$  llavors  $\neg R\bar{a} \in \text{Diag}(M)$  i per tant  $(N, h) \models \neg R\bar{a}$  i  $N \models \neg Rh(\bar{a})$ . Si  $f$  és un símbol de funció,  $\bar{a}$  és una tupla de  $M$  i  $b = f^M(\bar{a})$  tenim que la fórmula  $b = f(\bar{a})$  és una fórmula del diagrama de  $M$ ,  $(N, h) \models b = f(\bar{a})$  i per tant  $h(b) = f^N(h(\bar{a}))$ .

Per a demostrar 2, suposem que  $h$  és una immersió elemental. Llavors si  $\varphi(\bar{a}) \in \Delta(M)$  resulta que  $M_M \models \varphi(\bar{a})$ ,  $M \models \varphi(\bar{a})$ ,  $N \models \varphi(h(\bar{a}))$  i per tant  $(N, h) \models \varphi(\bar{a})$ . Així  $(N, h)$  és model de  $\Delta(M)$ . Recíprocament si  $(N, h)$  és model de  $\Delta(M)$ ,  $\varphi(\bar{x}) \in L$  i  $\bar{a}$  és una tupla de  $M$ ,  $M \models \varphi(\bar{a})$  si i només si  $\varphi(\bar{a}) \in \Delta(M)$  si i només si  $(N, h) \models \varphi(\bar{a})$  si i només si  $N \models \varphi(h(\bar{a}))$ .  $\square$

Per la proposició precedent, tot model del diagrama (elemental) de  $M$  ens dona una estructura  $N$  i una immersió (elemental) de  $M$  en  $N$ .

Veiem a continuació una aplicació dels diagrames.

**Proposició 1.4.2.** *Dues estructures  $M_1, M_2$  són elementalment equivalents si i només si hi ha una estructura  $N$  i immersions elementals de cada  $M_i$  en  $N$ .*

*Demostració.* Suposem que  $M_1$  i  $M_2$  són elementalment equivalents. Per la proposició 1.4.1 tot es redueix a trobar un model de  $\Delta(M_1) \cup \Delta(M_2)$ . Podem suposar que els dominis de  $M_1$  i  $M_2$  són disjunts (sinó prenem còpies isomorfes). Llavors, per compacitat hem de trobar un model de  $\varphi(\bar{a}) \wedge \psi(\bar{b})$ , on  $\varphi(\bar{a})$  és del diagrama elemental de  $M_1$  i  $\psi(\bar{b})$  és del diagrama elemental de  $M_2$ .

Com que  $M_2 \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$  i  $M_1$  és elementalment equivalent a  $M_2$  tenim que  $M_1 \models \exists \bar{x} \psi(\bar{x})$  i per tant  $M_2 \models \psi(\bar{c})$  per a una certa tupla  $\bar{c}$  d'elements de  $M_1$ . Llavors l'expansió  $M'$  de  $M_M$  interpretant  $\bar{b}$  com  $\bar{c}$  satisfà  $\psi(\bar{b})$  i per tant és model de  $\varphi(\bar{a}) \wedge \psi(\bar{b})$ .  $\square$

**Corol·lari 1.4.3.** *Tota estructura elementalment equivalent a una estructura finita li és isomorfa.*

*Demostració.* Exercici.  $\square$

*Exercici 1.4.4.* 1. Diem que una immersió  $h : M_1 \rightarrow M_2$  és existencialment tancada sii  $h$  preserva les fórmules existencials (és a dir, satisfà (1.3.1) per a totes les fórmules existencials). Demostreu que  $h$  és existencialment tancada sii existeix  $N$  i immersions  $f_i : M_i \rightarrow N$  tal que  $f_2 = h \circ f_1$  i  $f_1$  és elemental.

2. Donades  $M \subseteq N$ , diem que  $M$  està existencialment tancada a  $N$  si la identitat és una immersió existencialment tancada. Deduiu que  $M$  està existencialment tancada en  $N$  sii hi ha una extensió  $N'$  de  $N$  en la que  $M \preceq N'$ .



## Capítol 2

# Saturació

### 2.1 Tipus

Aquí considerarem un altre cop expansions del llenguatge afegint constants. Si-gui  $M$  una estructura i  $A$  un subconjunt del domini de  $M$ . Notarem per  $L(A)$  l'expansió de  $L$  consistent en afegir una constant nova per a cada element de  $A$ . No hi ha a cap perill en prendre els mateixos elements de  $A$  com a constants noves. Llavors  $M$  s'expandeix de manera natural a una  $L(A)$ -estructura que denotarem per  $M_A$ . És habitual suposar que el llenguatge conté només una quantitat numerable de variables. És el que hem estat suposant en totes les seccions precedent. Aquí ampliarem el llenguatge afegint una quantitat arbitrària de variables, preses dins un conjunt  $I$ . En aquest cas, el número de fórmules del llenguatge és  $|L| + |I| + \aleph_0$ .

Si tenim un conjunt  $\pi$  de  $L(A)$ -fórmules indicarem  $\pi = \pi(\bar{x})$  per indicar que les variables lliures de  $\pi$  estan entre les de la tupla  $\bar{x}$ . Com que un conjunt infinit de fórmules pot tenir un conjunt infinit de variables (en principi numerable) és natural denotar les seqüències infinites de variable com tuples  $\bar{x} = (x_i \mid i \in I)$  infinites.

**Definició 2.1.1.** Un conjunt  $\pi$  de  $L(A)$ -fórmules (possiblement amb variables lliures) és *finitament satisfactible en  $M$*  si per a cada subconjunt finit  $\pi_0 = \pi_0(\bar{x})$  de  $\pi$  hi ha una tupla  $\bar{a}$  de  $M$  que satisfà totes les fórmules de  $\pi_0$ , i.e., tal que  $M_A \models \pi_0(\bar{a})$ . Un *tipus de  $M$  sobre  $A$*  (o  *$A$ -tipus de  $M$* ) és un conjunt de  $L(A)$ -fórmules finitament satisfactible en  $M$ . Una *realització* de  $\pi$  és una tupla  $\bar{a} \in M$  de la mateixa llargada que el nombre de variables (i indexada en el mateix conjunt, és a dir, si  $\bar{x} = (x_i \mid i \in I)$  llavors  $\bar{a} = (a_i \mid i \in I)$ ) que satisfà totes les fórmules de  $\pi$ , és a dir,  $M_A \models \pi(\bar{a})$ .

Quan el nombre de variables lliures d'un tipus és com a molt  $n$  es parla de  $n$ -tipus de  $M$  sobre  $A$ . Si  $I$  és un conjunt (possiblement infinit) de variables que conté totes les variables lliures de  $\pi$ , en direm  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$ . Quant  $A$  és buit parlarem senzillament de tipus de  $M$  a seques (o  $n$ -tipus de  $M$  o  $I$ -tipus de

$M$ ). Farem servir  $L_I(A)$  per denotar el conjunt de les fórmules amb paràmetres a  $A$  i variables lliures a  $I$ . Quan parlem de  $n$ -tipus es pressuposa un conjunt de  $n$  variables fixat a priori. De fet el nom de les variables és indiferent, el que realment importa és el nombre de variables que hi ha a  $I$ . En aquest sentit es fa servir  $L_n(A)$  per indicar  $L_I(A)$  quan  $I$  té cardinal  $n$ .

**Definició 2.1.2.** Un  $I$ -tipus  $\pi$  de  $M$  sobre  $A$  és diu *complet* si per a cada  $L_I(A)$ -fórmula  $\varphi$  tenim que o bé  $\varphi \in \pi$  o bé  $\neg\varphi \in \pi$ . Un  $n$ -tipus complet es defineix anàlogament.

*Exercici 2.1.3.* Sigui  $\pi$  un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$ .

1. per a cada  $\varphi \in L_I(A)$  o bé  $\pi \cup \{\varphi\}$  o bé  $\pi \cup \{\neg\varphi\}$  és un tipus de  $M$  sobre  $A$ .
2. Deduïu que tot  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$  s'extén a un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$  complet.
3. Deduïu que un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$  és complet sii és un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$  maximal (per la inclusió) al conjunt del  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$ .

*Exercici 2.1.4.* Sigui  $p$  és un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$  complet. Demostreu:

1.  $p$  és tancat per conjunció: si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in p$  llavors  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \in p$ .
2. si  $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in p$  llavors  $\exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in p$ .

Al conjunt dels  $I$ -tipus complets de  $M$  sobre  $A$  s'el denota per  $S_I^M(A)$ . Quan  $I$  té  $n$  variables i no volem posar cap èmfasi en quines variables hi ha es sol denotar per  $S_n^M(A)$ . Observem que  $|S_I^M(A)| \leq 2^{|L|+|A|+|I|+\aleph_0}$ .

**Definició 2.1.5.** Sigui  $\bar{a}$  és una tupla d'elements de  $M$  i  $A$  un subconjunt de  $M$ . Fixem una tupla  $\bar{x}$  de variables de la mateixa longitud que  $\bar{a}$ . El *tipus de  $\bar{a}$  sobre  $A$  a  $M$* , que denotarem per  $\text{tp}_M(\bar{a}/A)$  és

$$\{\varphi(\bar{x}) \in L(A) \mid M_A \models \varphi(\bar{a})\}.$$

Observem que  $\text{tp}_M(\bar{a}/A)$  és un tipus complet sobre  $A$ .

Si  $N$  és una extensió elemental de  $M$ ,  $M \preceq N$ ,  $A$  també és subconjunt del domini de  $N$  i podem parlar de tipus de  $N$  sobre  $A$ . De fet no hi ha cap diferència. Òbviament tot  $I$ -tipus de  $N$  sobre  $A$  és un  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $A$ . Però si  $\pi$  és un  $I$  tipus de  $N$ , per a cada subconjunt finit  $\pi_0(\bar{x})$  de  $\pi$ , com que  $N_A \models \exists \bar{x} (\bigwedge \pi_0(\bar{x}))$  i  $M \preceq N$  tenim que  $M_A \models \exists \bar{x} (\bigwedge \pi_0(\bar{x}))$  i per tant  $\pi$  és també finitament satisfactible a  $M$ . En particular per a tipus complets:  $S_I^M(A) = S_I^N(A)$ . Si  $\bar{a}$  és una tupla de  $M$  observem que també es compleix que  $\text{tp}_M(\bar{a}/A) = \text{tp}_N(\bar{a}/A)$ .

*Exercici 2.1.6.* Demostreu, usant el lema 2.1.7, que els tipus complets de  $M$  sobre  $A$  son els tipus de tuples d'alguna extensió elemental de  $M$ , és a dir,

$$S_n^M(A) = \{\text{tp}_N(\bar{a}/A) \mid N \text{ és una extensió elemental de } M \text{ i } \bar{a} \in N\}$$

**Lema 2.1.7.** *Sigui  $M$  una  $L$ -estructura, i  $P$  un conjunt de  $I$ -tipus de  $M$  sobre  $M$ . Llavors existeix una extensió elemental de  $M$  que realitza tots el tipus de  $P$  i de cardinal com a molt  $|M| + |L| + |P| + |I| + \aleph_0$ .*

*Demostració.* Per a cada tipus  $\pi$  de  $P$  prenem  $I$ -una tupla de constant  $\overline{c}_\pi$  noves i diferents (entre elles i de les de  $M$ ) Notem per  $\pi(\overline{c}_\pi)$  el resultat de substituir les variable lliures de  $\pi$  per les constants de  $\overline{c}_\pi$ . Considerem ara el conjunt de fórmules

$$\Sigma = \Delta(M) \cup \bigcup_{\pi \in P} \pi(\overline{c}_\pi)$$

Com que els tipus són finitament satisfactibles a  $M_M$ , tota part finita de  $\Sigma$  es satisfà en una expansió adequada de  $M_M$ . Per compacitat i Löwenheim-Skolem descendent  $\Sigma$  té un model de cardinal com a molt  $|M| + |L| + |P| + |I| + \aleph_0$ . Aquest model serà de la forma  $(N, h, \overline{c}_\pi^N)_{\pi \in P}$  on  $h : M \rightarrow N$  denota l'interpretació de les constants de  $M$ . Per l'exercici 1.4.1  $h$  és una immersió elemental de  $M$  en  $N$ . per l'exercici 1.3.5 existeix  $M' \succ M$  i un isomorfisme  $h' : M' \rightarrow N$  que extén  $h$ . Verifiquem finalment que  $h^{-1}(\overline{c}_\pi^N)$  realitza  $\pi$  a  $M'$ . Si  $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in \pi$  llavors  $(N, h) \models \varphi(\overline{c}_\pi^N)$ , és a dir,  $N \models \varphi(\overline{c}_\pi^N, h(\overline{a}))$ . Com que  $h'$  és una isomorfia que extén  $h$  tenim  $M' \models \varphi(h^{-1}(\overline{c}_\pi^N), \overline{a})$ .  $\square$

## 2.2 Saturació

**Definició 2.2.1.** Sigui  $M$  una  $L$ -estructura y  $\kappa$  un cardina infinit. Es diu que  $M$  és  $\kappa$ -saturat si per a cada subconjunt  $A \subseteq M$  de cardinal menor que  $\kappa$ ,  $M$  realitza tots els 1-tipus sobre  $A$ .

Com que tot tipus es pot estendre a un tipus complet, n'hi ha prou amb realitzar tots els 1-tipus complets sobre qualssevol conjunt de paràmetres de cardinal menor que  $\kappa$ .

*Exercici 2.2.2.* 1. Si  $M$  és finit,  $M$  és  $\kappa$ -saturat per a qualsevol cardinal  $\kappa$ .

2. Si  $M$  és infinit i  $\kappa$ -saturat llavors  $|M| \geq \kappa$ .

La màxima saturació que pot tenir una estructura de cardinal  $\kappa$  és  $\kappa$ -saturació.

**Definició 2.2.3.** Un model  $M$  és saturat si és  $|M|$ -saturat.

**Teorema 2.2.4.** *Sigui  $M$  una estructura i  $\kappa$  un cardinal infinit. Llavors existeix una extensió elemental de  $M$   $\kappa^+$ -saturada de cardinal com a molt  $2^{|L|} |M|^\kappa$ .*

*Demostració.*  $M$  té  $|M|^\kappa$  subconjunts  $A$  de cardinal com a molt  $\kappa$  i, per a cada un d'aquests  $A$  tenim que  $|S_1^M(A)| \leq 2^{|L| + \kappa}$ . Pel lema 2.1.7 hi ha una extensió elemental  $M_1$  de  $M$  de cardinal com molt  $2^{|L|} |M|^\kappa$  que realitza tots els 1-tipus de  $M$  sobre un conjunt de com a molt  $\kappa$  paràmetres. Si ho apliquem de nou a  $M_1$  obtenim  $M_2$  extensió elemental de  $M_1$  de cardinal com molt  $2^{|L|} (2^{|L|} |M|^\kappa)^\kappa = 2^{|L|} |M|^\kappa$  i que realitza tots els 1-tipus de  $M_1$  sobre un conjunt de com a molt  $\kappa$

paràmetres. Iterant aquest procediment construïm una cadena contínua  $(M_\alpha \mid \alpha < \kappa^+)$  amb  $M_0 = M$  i on  $M_{\alpha+1}$  és una extensió elemental de  $M_\alpha$  de cardinal com a molt  $2^{|L|} |M|^\kappa$  que realitza tots els tipus de  $M_\alpha$  sobre un conjunt de com a molt  $\kappa$  paràmetres. per l'exercici 1.3.10 la cadena és elemental i pel lema de la cadena 1.3.9  $M$  és subestructura elemental de la unió de la cadena  $N$ . A més  $N$  és  $\kappa^+$ -saturada per regularitat de  $\kappa^+$  i de cardinal com a molt  $2^{|L|} |M|^\kappa$ .  $\square$

*Exercici 2.2.5.* Demostreu que tota estructura  $M$  té una extensió  $\omega$ -saturada de cardinal com a molt  $2^{|L|} |M|$ .

Normalment tindrem que  $\kappa \geq |L|$  i llavors el cardinal de l'extensió queda limitat per  $|M|^\kappa$ . Si a més  $\kappa \geq |M|$  la cota superior del cardinal esdevé  $2^\kappa$ .

Fins ara hem considerat que al llenguatge hi ha només una quantitat numerable de variables. és interessant estendre els resultat a un conjunt no numerables variables. Donat un conjunt infinit  $I$  de variable noves, considerem les fórmules que es construeixen usant aquest conjunt de noves variables, que denotarem per  $L_I$ . De la mateixa manera, si  $A$  és un conjunt de paràmetres d'un model  $M$  ( $A \subseteq M$ )  $L_I(A)$  denota totes les fórmules amb paràmetres a  $A$  i variables lliures a  $I$ . La notació  $S_I^M(A)$  té el mateix significat que abans. Normalment les variables de  $I$  estaran indexades en un cert cardinal  $\kappa$ :  $I = (x_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ . Una realització d'un  $I$ -tipus  $\pi$  de  $M$  sobre  $A$  és una seqüència  $(a_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  d'elements de  $M$  (o d'una extensió elemental  $N$  de  $M$ ) tal que  $N_A \models \pi(a_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ . Si notem la seqüència de variables  $(x_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  per  $\bar{x}$  i la seqüència d'elements  $(a_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  podrem continuar fent servir la mateixa notació: Una realització de  $\pi = \pi(\bar{x})$  és una seqüència  $\bar{x}$  tal que  $N_A \models \pi(\bar{x})$ . Quan posem  $\varphi = \varphi(\bar{x}) = \varphi(x_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  voldrà dir que la fórmula  $VF$  té les seves variables lliures entre les de  $(x_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ , i òbviament només fa servir un número finit d'aquestes variables. Si comptem el nombre de fórmules de  $L_I(A)$  en surten  $|L| + |I| + |A| + \aleph_0$  i per tant  $|S_I^M(A)| \leq 2^{|L| + |I| + |A| + \aleph_0}$ . També val la proposició 2.1.7 per a  $I$  tipus qualssevol amb la restricció que tots els tipus ho siguin sobre el mateix conjunt  $I$  de variables i llavors el cardinal del model on es realitzen està acotat per  $|M| + |L| + |I| + |P|$ .

**Proposició 2.2.6.** *Si  $M$  és  $\kappa$ -saturat i  $I$  és un conjunt de variables de cardinal com a molt  $\kappa$  llavors  $M$  realitza tot  $I$ -tipus de  $M$  sobre conjunts de paràmetres de cardinal menor que  $\kappa$ .*

*Demostració.* Sigui  $p$  un  $I$ -tipus. Podem suposar que  $p$  és complet i que les variables de  $p$  estan indexades en  $\kappa$ . Construïm una realització  $(a_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  de  $p$  recursivament. Notarem per  $\bar{a}_\alpha = (a_\beta \mid \beta < \alpha)$  i  $p_\alpha$  el subtipus de  $p$  format per les fórmules que tenen les variables lliures entre  $(x_\beta \mid \beta < \alpha)$ . Si construïm  $(a_\alpha \mid \alpha < \kappa)$  de tal manera que  $\bar{a}_\alpha$  realitzi  $p_\alpha$  ja hauré acabat. Comencem prenent, per  $\kappa$ -saturació, una realització  $a_0$  de  $p_1$ . Un cop construïda  $\bar{a}_\alpha$  una realització de  $p_\alpha$ , considerem  $q_\alpha$  el conjunt de fórmules obtingut substituint en  $p_{\alpha+1}$  les variables  $(x_\beta \mid \beta < \alpha)$  pels paràmetres  $\bar{a}_\alpha$ . Veiem que  $q_\alpha = q_\alpha(x_\alpha)$  és consistent. És clarament tancat per conjunció i tota  $\varphi(\bar{a}, x_\alpha) \in q_\alpha$ , s'obté substituint una certa tupla finita de variables  $\bar{x}$  de  $(x_\beta \mid \beta < \alpha)$  per la seva

corresponent tupla  $\bar{a}$  d'elements de  $\bar{a}_\alpha$  a una certa formula  $\varphi(\bar{x}, x_\alpha) \in p_{\alpha+1}$ . Com que  $p$  és complet la fórmula  $\exists x_\alpha \varphi(\bar{x}, x_\alpha)$  està a  $p_\alpha$  i com que  $\bar{a}_\alpha$  realitza  $p_\alpha$  tenim que  $M_A \models \exists x_\alpha \varphi(\bar{a}, x_\alpha)$ . Així  $q_\alpha$  és un 1-tipus sobre el conjunt de paràmetres  $A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ , que té cardinal menor que  $\kappa$ . Per saturació prenem  $a_\alpha$  una realització de  $q_\alpha$  en  $M$  i ja hem acabat, doncs si  $\varphi(\bar{x}, x_\alpha) \in P_{\alpha+1}$  llavors  $\varphi(\bar{a}, x_\alpha) \in q_\alpha$  i per tant  $M_A \models \varphi(\bar{a}, a_\alpha)$ .  $\square$

**Corol·lari 2.2.7.** *Si  $M$  és  $\kappa$ -saturat i  $N$  és elementalment equivalent a  $M$  i de cardinal com a molt  $\kappa$  llavors hi ha una immersió elemental de  $N$  en  $M$ .*

*Demostració.* Considerem una enumeració  $\bar{n}$  de  $N$  i sigui  $p$  el tipus  $\text{tp}_N(\bar{n}/\emptyset)$ . Com que  $M$  i  $N$  són elementalment equivalents i  $p$  és sobre el buit,  $p$  també és un tipus de  $M$  sobre buit. Llavors pel lema 2.2.6  $p$  es realitza a  $M$  mitjançant una seqüència  $\bar{a}$ . Llavors l'aplicació que envia  $\bar{n}$  a  $\bar{a}$  coordinada a coordinada és elemental. Si  $\varphi(\bar{x}) \in L$ ,  $M \models \varphi(\bar{m})$  si i només si  $\varphi(\bar{x}) \in p$  si i només si  $N \models \varphi(\bar{a})$ .  $\square$

Es habitual dir que  $M$  és  $\kappa$ -universal qual per a tota  $N$  elementalment equivalent a  $M$  i de cardinal menor que  $\kappa$  hi ha immersió elemental de  $N$  a  $M$ . Amb aquesta terminologia, la proposició 2.2.6 es pot enunciar dient que els models  $\kappa$ -saturats són  $\kappa^+$ -universals.

## 2.3 Aplicacions elementals parcials

En aquesta secció considerarem aplicacions parcials de  $M$  en  $N$ . Una aplicació parcial  $f : M \rightarrow N$  és una aplicació que va d'un subconjunt de  $M$  a  $N$ . Una aplicació parcial injectiva no és res més que una bijecció entre subconjunt de  $M$  i  $N$ .

**Definició 2.3.1.** Una aplicació parcial  $f : M \rightarrow N$  és elemental si per a tota tupla  $\bar{a}$  del domini de  $f$  i tota  $\varphi(\bar{x}) \in L$  tenim

$$M \models \varphi(\bar{a}) \text{ si i només si } N \models \varphi(f(\bar{a})).$$

Equivalentment, per a tota tupla  $\bar{a}$  del domini de  $f$  tenim que

$$\text{tp}_M(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}_N(f(\bar{a})/\emptyset).$$

Observem que Tota aplicació elemental parcial és injectiva i la seva inversa també és elemental. Si el domini és una subestructura llavors és una immersió (no necessàriament elemental) del domini en  $N$ .

Si hi ha una aplicació elemental parcial entre  $M$  i  $N$  llavors  $M$  i  $N$  han de ser elementalment equivalents. En aquest sentit és còmode pensar que quan  $M$  i  $N$  son equivalents, l'aplicació buida (entre  $M$  i  $N$ ) es elemental.

**Definició 2.3.2.** Suposem que  $f$  és una aplicació elemental parcial de  $M$  en  $N$ , i  $\pi$  és un tipus de  $M$  sobre  $\text{dom } f$ . El conjugat de  $\pi$  per  $f$  es defineix com

$$\pi^f = \{\varphi(\bar{x}, f(\bar{a})) \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in \pi\}.$$

**Lema 2.3.3.** *Sigui  $f$  una aplicació elemental parcial de  $M$  en  $N$ .*

1. *Si  $\pi$  és un tipus sobre  $\text{dom } f$  llavors  $\pi^f$  és un tipus sobre  $\text{rec } f$ .*
2. *Si  $a \in \text{dom } f$  i  $A \subseteq \text{dom } f$  llavors  $\text{tp}(f(a)/f(A)) = \text{tp}^f(a/A)$ .*
3. *Siguin  $a$  un element de  $M$  i  $b$  un element de  $N$ . Llavors  $f \cup \{(a, b)\}$  és elemental si i només si  $b$  realitza  $\text{tp}^f(a/\text{dom } f)$ .*

*Demostració.* 1. Observem que  $\pi^f$  és un conjunt de fórmules amb paràmetres a  $\text{rec } f$  amb les mateixes variables que  $\pi$ . Una part finita de  $\pi^f$  és de la forma  $\{\varphi_1(\bar{x}, f(\bar{a})), \dots, \varphi_n(\bar{x}, f(\bar{a}))\}$  amb  $\varphi_i(\bar{x}, \bar{a}) \in \pi$ . Com que  $M$  és model de  $\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1 \dots n} \varphi_i(\bar{x}, \bar{a})$  i  $f$  és elemental llavors  $N \models \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1 \dots n} \varphi_i(\bar{x}, f(\bar{a}))$  i per tant  $\pi^f$  és finitament satisfactible a  $N$ .

2. Com que  $f$  és elemental, si  $\bar{a} \in A$ ,  $N \models \varphi(f(a), f(\bar{a}))$  si i només si  $M \models \varphi(a, \bar{a})$ .

3. Suposem que  $b$  realitza  $\text{tp}^f(a/A)$ , és a dir  $\text{tp}(b/f(A)) = \text{tp}^f(a/A)$ . Per a tota fórmula  $\varphi(x\bar{y}) \in L$  i tota tupla  $\bar{a}$  del domini de  $f$  tenim que  $M \models \varphi(a\bar{a})$  sii  $\varphi(x\bar{a}) \in \text{tp}(a/A)$  si i només si  $\varphi(xf(\bar{a})) \in \text{tp}^f(a/A) = \text{tp}(b/f(A))$  si i només si  $N \models \varphi(bf(\bar{a}))$ . El recíproc surt de 2.  $\square$

És fàcil veure que  $\pi$  és complet sii ho és  $\pi^f$  i que per tant conjujar per  $f$  és una bijecció entre  $S_I^M(A)$  i  $S_I^N(f(A))$ .

Veiem a continuació una senzilla aplicació que demostra la unicitat dels models saturats d'una teoria completa en un cardinal fixat.

## 2.4 Més sobre saturació

**Teorema 2.4.1.** *Dos models saturats, del mateix cardinal i elementalment equivalents són isomorfs.*

*Demostració.* Siguin  $M, N$  models saturats, de cardinal  $\lambda$  i elementalment equivalents. Siguin  $(a_i \mid i \in \lambda)$  i  $(b_i \mid i \in \lambda)$  enumeracions de  $M$  i  $N$  respectivament. Construïm una cadena  $(f_i \mid i \in \lambda)$  d'aplicacions elemental parcials amb  $a_i \in \text{dom } f_{i+1}$  i  $b_i \in \text{rec } f_{i+1}$ . La unió de la cadena serà la isomorfia buscada. Comencem amb  $f_0$  l'aplicació buida i en els límits prenem unions. Per tal de construir  $f_{i+1}$  prenem, per saturació una realització  $c$  de  $\text{tp}^f(a_i/\text{dom}(f))$ . Per el lema 2.3.3  $f' = f \cup \{(a_i, d)\}$  és elemental. Ara prenem una realització  $c$  de  $\text{tp}^{f'^{-1}}(b_i/\text{rec}(f'))$  i llavors, per 2.3.3,  $f_{i+1} = f_i \cup \{(a_i, d), (c, b_i)\}$  és elemental.  $\square$

Aquesta demostració prova que si  $M$  i  $N$  són saturats i del mateixa cardinal, tota aplicació elemental parcial de cardinal menor que  $|M| = |N|$  s'extén a una isomorfia entre  $M$  i  $N$ . En particular:

**Corol·lari 2.4.2.** *Si  $M$  és saturat tota aplicació elemental parcial de cardinal menor que  $|M|$  s'extén a un automorfisme de  $M$ .*

**Definició 2.4.3.** Es diu que  $M$  és  $\kappa$ -homogeni si donada una aplicació elemental parcial  $f$  de cardinal  $< \kappa$  i  $a$  un element de  $M$  hi ha una extensió de  $f$  a una aplicació elemental parcial tal que inclou  $a$  en el domini. Això és equivalent a dir que hi ha un element  $b$  a  $M$  tal que  $f \cup \{(a, b)\}$  és elemental.

*Exercici 2.4.4.* Demostreu que tot model  $\kappa$ -saturat és  $\kappa$ -homogeni.

Sabem que tot model  $\kappa$ -saturat és  $\kappa^+$ -universal i  $\kappa$ -homogeni. anem a veure que val el recíproc.

**Teorema 2.4.5.** *Suposem que  $\kappa > |L| + \aleph_0$ . Tot model  $\kappa$ -universal i  $\kappa$ -homogeni és  $\kappa$ -saturat.*

*Demostració.* Suposem que  $M$  és  $\kappa$ -universal i  $\kappa$ -homogeni. Sigui  $A$  un conjunt de paràmetres de cardinal menor que  $\kappa$  i  $p \in S_1^M(A)$ . Sigui, pel lema 2.1.7,  $M'$  una extensió elemental de  $M$  que realitza  $p$  mitjançant  $b$ . Prenem, pel teorema 1.3.7, un model  $N \preceq M'$  que contingui  $A$  i  $b$  de cardinal com a molt  $|A| + |L| + \aleph_0 < \kappa$ . Observem que  $p = \text{tp}^N(b/A)$ . Per  $\kappa$ -universalitat hi ha una immersió elemental  $f : N \rightarrow M$ . Per  $\kappa$ -homogeneïtat, hi ha un element  $a$  de  $M$  tal que  $f \upharpoonright A \cup \{(a, f(b))\}$  és elemental. Així  $a$  realitza el tipus conjugat per  $f^{-1}$  de  $f(b)$  que és  $p$ , ja que  $f(b)$  realitza el tipus conjugat per  $f$  de  $\text{tp}^N(b/A) = p$ .  $\square$

Per a cas en que  $\kappa = |L| + \aleph_0$  cal imposar  $\kappa^+$ -universal:

**Teorema 2.4.6.** *Suposem que  $\kappa = |L| + \aleph_0$ . Tot model  $\kappa^+$ -universal i  $\kappa$ -homogeni és  $\kappa$ -saturat.*

*Demostració.* És idèntica a l'anterior, llevat que el model  $N$  que conté la realització de  $p$  és ara de cardinal  $|A| + |L| + \aleph_0 = \kappa$  i per trobar una immersió elemental de  $N$  el  $M$  necessitem que  $M$  sigui  $\kappa^+$ -universal.  $\square$

## 2.5 Eliminació de quantificadors

**Definició 2.5.1.** Es diu que una teoria  $T$  elimina quantificadors si per a tota fórmula  $\varphi = \varphi(\bar{x})$ , on  $\bar{x}$  és una tupla no buida de variables, hi ha una fórmula sense quantificadors  $\psi = \psi(\bar{x})$  tal que  $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$ <sup>1</sup>.

En aquesta definició, contràriament a l'habitual excloem la tupla buida de variables: no exigim que tot enunciat, mòdul  $T$ , sigui equivalent a un enunciat sense quantificadors. Observem que si un teoria elimina quantificadors tota immersió entre models de  $T$  és elemental.

Si  $\bar{a}$  és una tupla d'elements de  $M$ , el tipus atòmic de  $\bar{a}$  (sobre buit), que denotarem per  $\text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset)$  o  $\text{atp}_M(\bar{a})$  és el conjunt de fórmules atòmiques o negades d'atòmiques que satisfà  $\bar{a}$ :

$$\text{atp}(\bar{a}) = \{\varphi(\bar{x}) \in L \mid \varphi \text{ és atòmica o negada d'atòmica i } M \models \varphi(\bar{a})\}.$$

El següent és un criteri que utilitzarem posteriorment diverses vegades.

<sup>1</sup> això és equivalent a  $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$

**Proposició 2.5.2.** *Una teoria  $T$  elimina quantificadors si i només si donats  $M, N$  models de  $T$  i  $\bar{a}, \bar{b}$  tuples no buides qualssevol de  $M$  i  $N$  respectivament tals que  $\text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset) = \text{atp}_N(\bar{b}/\emptyset)$  llavors també  $\text{tp}_M(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}_N(\bar{b}/\emptyset)$ .*

*Demostració.* La implicació d'esquerra a dreta és trivial i ens concentrem en el recíproc. Donada  $\varphi(\bar{x})$ , on  $\bar{x}$  és una tupla no buida, considerem

$$\Psi(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) \mid \psi(\bar{x}) \text{ no té quantificadors i } T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})\}.$$

Per compacitat tot es redueix a demostrar que  $T \cup \Psi(\bar{x}) \models \varphi(\bar{x})$ . Sigui  $M$  un model de  $T$  i  $\bar{a}$  una tupla qualsevol de  $M$  que realitza  $\Psi(\bar{x})$ . Hem de veure que llavors  $M \models \varphi(\bar{a})$ .

Afirmem que  $T \cup \text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$  és consistent. El tipus  $\text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset)$  el suposem escrit usant  $\bar{x}$  com a variables lliures. Altrament tindríem que  $T \cup \{\varphi(\bar{x})\} \models \neg \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{x})$  per certes  $\psi_i(\bar{x}) \in \text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset)$ . Això implicaria que  $\neg \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{x}) \in \Psi(\bar{x})$  i per tant  $M \models \neg \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(\bar{a})$  que és un absurd, doncs cada  $\psi_i(\bar{x})$  és satisfeta per  $\bar{a}$ .

Com que  $T \cup \text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$  és consistent, hi ha un model  $N$  de  $T$  i una tupla  $\bar{b}$  de  $M$  que realitza  $\text{atp}_M(\bar{a}/\emptyset) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ . Llavors  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  tenen el mateix tipus atòmic (sobre buit) i per hipòtesi també han de tenir el mateix tipus (sobre buit). Així  $M \models \varphi(\bar{a})$ , ja que  $N \models \varphi(\bar{b})$ .  $\square$

*Exercici 2.5.3.* Sigui  $\Delta$  un conjunt de fórmules tancat per combinació booleana. El  $\Delta$ -tipus d'una tupla  $\bar{a}$  d'un model  $M$  es defineix com  $\Delta\text{tp}(a/\emptyset) = \{\varphi(\bar{x}) \in \Delta \mid M \models \varphi(\bar{x})\}$ . Demostreu que són equivalents:

1. Per a tota fórmula  $\varphi(\bar{x})$  (on  $\bar{x}$  és una tupla no buida de variables) existeix una  $\Delta$ -fórmula  $\psi(\bar{x})$  tal que  $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$
2. donats  $M, N$  models de  $T$  i  $\bar{a}, \bar{b}$  tuples no buides qualssevol de  $M$  i  $N$  respectivament tals que  $\Delta\text{tp}_M(\bar{a}/\emptyset) = \Delta\text{tp}_N(\bar{b}/\emptyset)$  llavors també  $\text{tp}_M(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}_N(\bar{b}/\emptyset)$ .

*Exercici 2.5.4.* Demostreu que tota teoria elimina quantificadors en una expansió definicional. Una expansió definicional de  $T$  és una teoria  $T'$  en una expansió  $L'$  del llenguatge  $L$  tal que satisfà les dues condicions següents: 1:  $T' \cap L = T$  i 2: per a tota  $\varphi(\bar{x}) \in L'$  hi ha  $\psi(\bar{x}) \in L$  tal que  $T' \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$ .

## Capítol 3

# Isomorfia Parcial

### 3.1 Isomorfia parcial

En aquest capítol pressuposarem un llenguatge fix  $L$  i quan parlem d'estructures o models volem dir  $L$ -estructures.

**Definició 3.1.1.** Una isomorfia parcial  $f$  de  $M$  en  $N$  és una aplicació parcial  $f : M \rightarrow N$  injectiva que compleixen les condicions següents:

1. Per a tot símbol de predicat  $R$  i tota tupla  $\bar{a}$  del domini de  $f$  es compleix que  $\bar{a} \in R^M$  si i només si  $f(\bar{a}) \in R^N$ .
2. Per a tot símbol de funció  $F$ , tota tupla  $\bar{a}$  i element  $a$  del domini de  $f$  es compleix que  $F^M(\bar{a}) = a$  si i només si  $F^N(f(\bar{a})) = f(a)$ .
3. Per a tot símbol de constant  $c$  i tot element  $a$  del domini de  $f$  es compleix que  $c^M = a$  si i només si  $c^M = f(a)$ .

Podríem haver definit, de forma equivalent, isomorfia parcial com una aplicació parcial que preserva les fórmules del tipus

$$x = y, \quad R(x_1, \dots, x_n), \quad x = F(x_1, \dots, x_n).$$

Observem que la inversa d'una isomorfia parcial també és una isomorfia parcial.

Per exemple, tota part (subconjunt) d'una isomorfia entre subestructures de  $M$  i  $N$  és una isomorfia parcial. No és cert, però, que tota isomorfia parcial de  $M$  en  $N$  s'extén a una isomorfia  $f$  entre subestructures de  $M$  i  $N$  (una immersió de  $\text{dom}(f)$  en  $N$ ). Si prenem  $M = (\mathbb{Z}, s)$  l'aplicació  $\{(1, 4), (3, 7)\}$  és una isomorfia parcial de  $M$  en  $M$  que no la podem estendre posant 2 al domini. No es pot estendre, per tant, a una isomorfia entre subestructures de  $M$ .

*Exercici 3.1.2.* Demostreu que si el domini d'una isomorfia parcial  $f : M \rightarrow N$  és una subestructura llavors  $f$  és una immersió de  $\text{dom}(f)$  en  $N$ . En particular, quan el llenguatge és relacional, una isomorfia parcial no és més que una isomorfia entre subestructures.

**Definició 3.1.3.** Un sistema d'isomorfia parcial de  $M$  en  $N$  és una col·lecció no buida  $I$  d'isomorfies parcials de  $M$  en  $N$  que satisfà les dues propietats següents:

**Back** Per a tota  $f \in I$  i  $b \in N$  hi ha una  $g \in I$  que extén  $f$  i tal que  $b$  està en el recorregut de  $g$ .

**Forth** Per a tota  $f \in I$  i  $a \in M$  hi ha una  $g \in I$  que extén  $f$  i tal que  $a$  està en el domini de  $g$ .

Quan hi ha un sistema d'isomorfia parcial  $I$  de  $M$  en  $N$  es diu que  $M$  i  $N$  son parcialment isomorfs (via  $I$ ) i això s'indica així:  $M \cong_p N$  ( $I : M \cong_p N$  respectivament).

*Exemple 3.1.4.* 1. Siguin  $M, N$  dos ordres lineals densos sense extrems. La col·lecció de d'isomorfies entre subestructures finites de  $M$  i  $N$  és un sistema d'isomorfia parcial.

2. Si  $f$  és una isomorfia de  $M$  a  $N$  llavors  $\{f\}$ ,  $\{f \upharpoonright A \mid A \subseteq M, A \text{ finit}\}$  i  $\{f \upharpoonright A \mid A \subseteq M\}$  són tres sistemes d'isomorfia parcial diferents.

Així doncs, dues estructures isomorfs són parcialment isomorfs. Si les estructures són numerables també val el recíproc:

**Proposició 3.1.5.** *Dues estructures numerables i parcialment isomorfs són isomorfs.*

*Demostració.* Siguin  $(a_i \mid i \in \omega)$  i  $(b_i \mid i \in \omega)$  enumeracions de  $M$  i  $N$  i sigui  $I$  un sistema d'isomorfia parcial de  $M$  en  $N$ . Construïm una cadena d'isomorfies parcials  $(f_i \mid i \in \omega)$  tals que  $a_i$  estigui en el domini de  $f_{i+1}$  i  $b_i$  en el recorregut de  $f_{i+1}$ . Llavors la reunió dels  $f_i$  és una isomorfia de  $M$  en  $N$ . Prenem  $f_0 \in I$  qualsevol. Suposant construïda  $f_i$ , per Forth existeix  $g \in I$  que extén  $f_i$  amb  $a \in \text{dom}(g)$ . Per Back existeix  $f_{i+1}$  que extén  $g$  i tal que  $b \in \text{rec}(f_{i+1})$ .  $\square$

Si apliquem aquesta proposició a l'exemple 3.1.4 obtenim que hi ha un únic ordre lineal dens i sense extrems numerable. De fet, la demostració que hem donat és la mateixa que se sol donar pels ordres lineal densos sense extrems.

*Exercici 3.1.6.* 1. Demostreu que dues àlgebres de Boole sense àtoms son parcialment isomorfs via el conjunt d'isomorfies entre subàlgebres finites.

2. El Random Graph. El llenguatge conté només un símbol de relació binaria  $R$ . Un graf és una relació simètrica i antireflexiva. Els axiomes diuen que donats dos conjunts finits  $A_1, A_2$  de vèrtexs (elements del domini) hi ha un altre vèrtex relacionat amb tots el vèrtexs de  $A_1$  i cap de  $A_2$ . Dos models qualssevol d'aquesta teoria són parcialment isomorfs via el conjunt d'isomorfies entre subestructures finites.

3. (?) L'estructura random en un llenguatge relacional finit. Si  $L$  és relacional i finit considerem el conjunt d'axiomes següent:  $\forall \bar{x} (\bigwedge p(\bar{x}) \rightarrow \exists y (\bigwedge q(\bar{x}, y)))$ , per a cada parella  $p(\bar{x}), q(\bar{x}, y)$  de conjunts de fórmules atòmiques i negades d'atòmiques que no contenen una fórmula i la seva negació alhora i  $p(\bar{x}) \subseteq q(\bar{x}, y)$ .

*Observació 3.1.7.* Si tots els models d'una teoria numerable són parcialment isomorfs, per 3.1.5 llavors la teoria és  $\omega$ -categòrica i per tant completa. Veurem més endavant que també val el recíproc. Tots els exemples de l'exercici anterior són teories  $\omega$ -categòriques.

## 3.2 El teorema de Karp

La lògica  $L_{\infty\omega}$  és l'extensió de la lògica de primer ordre admetent conjuncions i disjuncions arbitràriament grans. Més precisament, les fórmules es construeixen a partir de les atòmiques i tancant per negació, conjunció arbitrària i quantificant una sola variable. A diferència de la lògica de primer ordre, les fórmules d'aquesta lògica constitueixen sempre una classe pròpia. A les fórmules sense variables lliures en direm també enunciats (o fórmules tancades)

Anem a veure que la isomorfia parcial caracteritza l'equivalència elemental en la lògica  $L_{\infty\omega}$ .

**Teorema 3.2.1** (Karp). *Dues estructures són elementalment equivalents en la lògica  $L_{\infty\omega}$  (és a dir, satisfan els mateixos enunciats de  $L_{\infty\omega}$ ) si i només si són parcialment isomorfes.*

*Demostració.* Suposem que  $I$  és un sistema d'isomorfia parcial entre  $M$  i  $N$ . Hem de veure que  $M$  i  $N$  són  $L_{\infty\omega}$ -equivalents. Farem la demostració en dos passos.

*Claim 1.* Donats  $t = t(\bar{x})$  un terme,  $f \in I$  i  $\bar{a}$  una tupla finita d'elements de  $\text{dom}(f)$  qualssevol, existeix  $g \in I$ ,  $f \subseteq g$  tal que  $t^M(\bar{a}) \in \text{dom}(g)$  i  $g(t^M(\bar{a})) = t^N(g(\bar{a}))$ .

*Demostració.* Per inducció sobre  $t$ . El cas en que  $t$  és una variable és obvi. Si  $t = F(t_1, \dots, t_n)$ , aplicant la hipòtesi d'inducció  $n$  cops obtenim  $h \in I$ , una extensió de  $f$  tal que  $\text{dom}(h)$  conté  $t_i^M(\bar{a})$  i  $h(t_i^M(\bar{a})) = t_i^N(h(\bar{a}))$  per  $i = 1 \dots n$ . Ara prenem  $g \in I$  una extensió de  $h$  amb  $t^M(\bar{a}) \in \text{dom}(g)$ . Com que  $g$  és isomorfia parcial, el seu domini conté  $t^M(\bar{a})$  i tots els  $t_i^M(\bar{a})$ , i  $t^M(\bar{a}) = F^M(t_1^M(\bar{a}), \dots, t_n^M(\bar{a}))$  tenim que

$$g(t^M(\bar{a})) = F^N(g(t_1^M(\bar{a})), \dots, g(t_n^M(\bar{a}))) =$$

i com que  $h(t_i^M(\bar{a})) = t_i^N(h(\bar{a}))$ ,

$$= F^N(t_1^N(g(\bar{a})), \dots, t_n^N(g(\bar{a}))) = t^N(g(\bar{a})).$$

Ara demostrarem que totes les aplicacions de  $I$  preserven totes les fórmules  $L_{\infty\omega}$ :

*Claim 2.* Donats  $\varphi = \varphi(\bar{x})$  una fórmula de  $L_{\infty\omega}$ ,  $f \in I$  i  $\bar{a}$  una tupla d'elements de  $\text{dom}(f)$  qualssevol

$$M \models \varphi(\bar{a}) \text{ si i només si } N \models \varphi(f(\bar{a})).$$

*Demostració.* Per inducció sobre la fórmula  $\varphi$ . Si la fórmula és  $t_1 = t_2$ , pel claim 1, prenem  $g \in I$  una extensió de  $f$  tal que  $t_i^M(\bar{a}) \in \text{dom}(g)$  i

$g(t_i^M(\bar{a})) = t_i^N(g(\bar{a}))$  per  $i = 1, 2$ . Llavors, per ser  $g$  injectiva  $t_1^M(\bar{a}) = t_2^M(\bar{a})$  si i només si  $t_1^N(g(\bar{a})) = t_2^N(g(\bar{a}))$ . El cas en que la fórmula és  $R(t_1, \dots, t_n)$  es fa anàlogament, aplicant el claim 1  $n$  cops per tal d'aconseguir una extensió  $g$  de  $f$  amb  $t_i^M(\bar{a}) \in \text{dom } g$  i  $g(t_i^M(\bar{a})) = t_i^N(g(\bar{a}))$  per  $i = 1 \dots n$ . Llavors  $g$  preserva  $R(t_1, \dots, t_n)$  per ser isomorfia parcial.

Els casos en què la fórmula és la negació d'una altra fórmula o la conjunció d'un conjunt de fórmules surten sense cap problema aplicant la hipòtesi d'inducció. Finalment fem el cas en què la fórmula és  $\exists x \varphi(x, \bar{x})$ . Si  $M \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$  llavors hi ha un element  $a \in M$  tal que  $M \models \varphi(a, \bar{a})$ . Prenem  $g \in I$  una extensió de  $f$  amb  $a \in \text{dom } g$ . Per hipòtesi d'inducció  $N \models \varphi(g(a), g(\bar{a}))$  i per tant  $N \models \exists x \varphi(x, g(\bar{a}))$ . El recíproc es fa usant Back en lloc de Forth.

Ara demostrarem el recíproc. Suposem que  $M$  i  $N$  satisfan les mateixes fórmules tancades de la lògica  $L_{\infty, \omega}$ . Demonstrarem que

$$I = \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ és parcial, finita i preserva totes les fórmules de } L_{\infty, \omega}\}$$

és un sistema d'isomorfia parcial. Per hipòtesi l'aplicació buida és de  $I$ . Per tal de demostrar Forth, siguin  $f \in I$  i  $a \in M$ . Sigui  $\bar{a}$  una enumeració del domini de  $f$ . Tot es redueix a trobar  $b \in M$  tal que les tuples  $a\bar{a}$  i  $bf(\bar{a})$  satisfacin les mateixes fórmules. Si no existís un tal  $b$  tindriem que per a cada  $b \in N$  hi ha una fórmula  $\varphi_b(x, \bar{x})$  de  $L_{\infty, \omega}$  per a la que  $M \models \varphi_b(a, \bar{a})$  però  $N \models \neg \varphi_b(b, f(\bar{a}))$ . Absurd, ja que llavors  $M \models \exists x \bigwedge_{b \in N} \varphi_b(x, \bar{a})$  i  $N \models \neg \exists x \bigwedge_{b \in N} \varphi_b(x, f(\bar{a}))$ , contradient el fet que  $f$  preserva totes les fórmules de  $L_{\infty, \omega}$ . Back es fa de manera anàloga.  $\square$

**Corol·lari 3.2.2.** *Dos models parcialment isomorfs són elementalment equivalents. De fet tota isomorfia parcial d'un sistema d'isomorfia parcial és una aplicació elemental.*

### 3.3 Isomorfia parcial i completesa

En aquesta secció donarem la proposició 3.3.2, un criteri força útil per a demostrar que una teoria és completa.

Comencem veient que per a models  $\omega$ -saturats, 'ser elementalment equivalents' i 'ser parcialment isomorfs' és el mateix.

**Proposició 3.3.1.** *Dos models  $\omega$ -saturats i elementalment equivalents són parcialment isomorfs.*

*Demostració.* Suposem que  $M, N$  són  $\omega$ -saturats i elementalment equivalents. Considerem  $I$  el conjunt de les aplicacions elementals parcials i finites de  $M$  en  $N$ .  $I$  és no buida, doncs l'aplicació buida està a  $I$ . Tot es redueix a veure que  $I$  té la propietat Forth (Back es fa igual). Siguin  $f$  és una aplicació elemental parcial finita i  $a$  un element de  $M$  qualsevol. Pel lema 2.3.3 tot es redueix a prendre, per saturació una realització de  $\text{tp}^f(a/\text{dom } f)$ .  $\square$

**Corol·lari 3.3.2.** *Una teoria  $T$  és completa si i només si tots els seus models  $\omega$ -saturats són parcialment isomorfs.*

*Demostració.* La implicació d'esquerra a dreta surt aplicant la proposició 3.3.1. Recíprocament si  $M$  i  $N$  són models de  $T$ , per la proposició 2.2.4 podem prendre  $M'$  i  $N'$  extensions elementals i  $\omega$ -saturades de  $M$  i  $N$  respectivament. Com que  $M' \cong_p N'$  llavors  $M \equiv M' \equiv N' \equiv N$ .  $\square$

*Exemple 3.3.3.* 1. La teoria  $T$  d'un ordre total amb anterior i següent. Una  $\mathbb{Z}$ -cadena d'un model de  $T$  consta d'un element més tots els seus predecessors i tots els seus successors. Una  $\mathbb{Z}$ -cadena és isomorfa a  $\mathbb{Z}$ . És fàcil veure que en un model  $\omega$ -saturat de  $T$  les  $\mathbb{Z}$ -cadenaes són denses i sense extrems. Llavors donats dos models  $\omega$ -saturats de  $T$  el conjunt d'isomorfies entre un nombre finit de  $\mathbb{Z}$ -cadenaes de  $M$  i de  $N$  és un conjunt d'isomorfia parcial. Llavors aquesta teoria és completa i hem axiomatitzat  $\text{Th}(\mathbb{Z}, <)$ .

2. La teoria d'una quantitat numerable de relacions independents: El llenguatge  $L$  consta d'una quantitat numerable de predicats 1-aris  $\{P_i \mid i \in \omega\}$ . Els axiomes consten de la fórmula  $\exists x (\bigwedge_{i \in A} P_i(x) \wedge \bigwedge_{i \in B} \neg P_i(x))$  per a cada parella  $A, B$  de subconjunt de  $\omega$  finits i disjunts.

*Exercici 3.3.4.* 1. Demostreu que donats  $M, N$   $(|L| + \aleph_0)^+$ -saturats,  $M \equiv N$  si hi ha un sistema d'isomorfia parcial constituït per isomorfismes entre subestructures de  $M$  i  $N$  respectivament (Indicació: considereu totes les aplicacions elementals parcials entre  $M$  i  $N$  tals que el domini i el recorregut son subestructures de  $M$  i  $N$  respectivament, de cardinal com a molt  $|L| + \aleph_0$ ).

2. Demostreu que  $T$  és completa si i només si donats dos models  $M, N$  de  $T$   $(|L| + \aleph_0)^+$ -saturats hi ha un sistema d'isomorfia parcial constituït per isomorfismes entre subestructures de  $M$  i  $N$  respectivament.

### 3.4 Isomorfia parcial i eliminació de quantificadors

Ara donarem una versió de la proposició 3.3.2 que serveix per a demostrar eliminació de quantificadors.

La subestructura engendrada per una tupla finita  $\bar{a}$  d'elements de  $M$ , que denotarem per  $\langle \bar{a} \rangle_M$  té per domini  $\{t(\bar{a}) \mid t(\bar{x}) \text{ terme de } L\}$ . Observem si  $\text{atp}_M(\bar{a}) = \text{atp}_N(\bar{b})$  llavors les subestructures generades per  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  (en  $M$  i  $N$  respectivament) són isomorfes per l'aplicació  $t(\bar{a}) \mapsto t(\bar{b})$ . Recíprocament, si hi ha un isomorfisme de  $\langle \bar{a} \rangle_M$  en  $\langle \bar{a} \rangle_N$  que envia  $\bar{a}$  a  $\bar{b}$  llavors, per l'exercici 1.3.3 (teorema de l'homomorfisme)  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  tenen el mateix tipus atòmic.

Hi ha dos candidats a sistema d'isomorfia parcial força interessants. El primer és el conjunt de tots els isomorfismes entre subestructures finitament generades de  $M$  i  $N$  respectivament, que denotem per  $I_{fg}(M, N)$ . L'altre és  $I_0(M, N) = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{a}, \bar{b} \text{ tuples finites de } M \text{ i } N \text{ respectivament amb } \text{atp}_M(\bar{a}) = \text{atp}_N(\bar{b})\}$ .

**Proposició 3.4.1.** *Donada una teoria  $T$  són equivalents:*

1.  $T$  és completa i elimina quantificadors.
2. Dos models  $\omega$ -saturats qualssevol  $M, N$  de  $T$  són parcialment isomorfs via  $I_0(M, N)$
3. Dos models  $\omega$ -saturats qualssevol  $M, N$  de  $T$  són parcialment isomorfs via  $I_{fg}(M, N)$

*Demostració.*  $1 \Rightarrow 2$ . Si  $T$  elimina quantificadors llavors  $\text{atp}_M(\bar{a}) = \text{atp}_N(\bar{b})$  sii  $\text{tp}_M(\bar{a}) = \text{tp}_N(\bar{b})$  i per tant  $I_0$  és el conjunt de les aplicacions elementals finites de  $M$  en  $N$ . A la proposició 3.3.1 ja hem vist que amb les nostres hipòtesis això és un sistema d'isomorfia parcial.

$2 \Rightarrow 3$ . Tenint en compte que  $\text{atp}_M(\bar{a}) = \text{atp}_N(\bar{b})$  sii les subestructures generades per  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  (en  $M$  i  $N$  respectivament) són isomorfes per l'aplica  $t(\bar{a}) \rightarrow t(\bar{b})$ , és fàcil comprovar que si  $I_0(M, N)$  és un sistema d'isomorfia parcial llavors també ho té  $I_{fg}(M, N)$ .

$3 \Rightarrow 1$ . La completesa surt aplicant la proposició 3.3.2. Per a l'eliminació de quantificadors apliquem el criteri de la proposició 2.5.2. Siguin  $M, N$  models de  $T$  i  $\bar{a}, \bar{b}$  tuples qualsevol de  $M$  i  $N$  respectivament. Usant la proposició 2.2.4 podem suposar que tant  $M$  com  $N$  són  $\omega$ -saturats. Com que  $\text{atp}_M(\bar{a}) = \text{atp}_N(\bar{b})$  resultat que  $f : \langle \bar{a} \rangle_M \rightarrow \langle \bar{a} \rangle_N$  definida per  $f(t^M(\bar{a})) = t^N(\bar{b})$  és una isomorfia. Llavors  $f \in I_{fg}(M, N)$ , que és un sistema d'isomorfia parcial. Pel corollari 3.2.2  $f$  és una aplicació elemental parcial i per tant  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  tenen el mateix tipus sobre  $\emptyset$ .  $\square$

*Exemple 3.4.2.* Pel que hem vist al exemples 3.1.6 i 3.3.3, les següents teories eliminen quantificadors:

1. Les àlgebres de Boole sense àtoms al llenguatge  $L = \{\wedge, \vee, 0, 1\}$ .
2. El Random graph al llenguatge  $L = (R)$ .
3. Les àlgebres de Boole sense àtoms al llenguatge  $L = \{\wedge, \vee, 0, 1\}$ .
4. L'estructura random en un llenguatge relacional finit.
5. Els ordres discrets al llenguatge  $L = \{\leq, s\}$ , on  $s$  és la funció següent.
6. Infinites relacions independents al llenguatge  $L = \{P_i \mid i \in \omega\}$ .

*Exercici 3.4.3.* Demostra la variants de la proposició 3.4.1 següent: Donada una teoria  $T$  són equivalents:

1.  $T$  elimina quantificadors.
2. Dos models  $\omega$ -saturats qualssevol  $M, N$  de  $T$  o bé són parcialment isomorfs via  $I_{fg}(M, N)$  o bé  $I_{fg}(M, N)$  és buit.
3. Dos models  $\omega$ -saturats qualssevol  $M, N$  de  $T$  o bé són parcialment isomorfs via  $I_0(M, N)$  o bé  $I_0(M, N)$  és buit.

*Exercici 3.4.4.* Demostreu que  $T$  és completa i elimina quantificadors si i només si donats dos models  $M, N$  de  $T$   $(|L| + \aleph_0)^+$ -saturats, el conjunt d'isomorfismes entre subestructures de  $M$  i  $N$  de cardinal com a molt  $|L| + \aleph_0$  és un sistema d'isomorfia parcial.

*Exercici 3.4.5.* Demostreu que  $T$  elimina quantificadors si i només si donats dos models  $M, N$  de  $T$  amb  $N$   $(|L| + \aleph_0)^+$ -saturat, donades  $M_1 \subseteq M_2$  dues subestructures de  $M$  de cardinal com a molt  $|L| + \aleph_0$  i donada una immersió  $f$  de  $M_1$  en  $N$  podem trobar una immersió de  $M_2$  en  $N$  que extengui  $f$ .

*Exercici 3.4.6.* (?) En el llenguatge que conté un sol símbol de funció 1-ària  $F$ , considerem la teoria  $T$  que diu que  $F$  és una permutació (bijectiva). Demostreu que  $T$  elimina quantificadors. Doneu totes les seves completacions (indicació: descriuiu, per a cada  $n$  el nombre de  $n$ -cicles).



## Capítol 4

# Omitting Types

### 4.1 A little bit of topology

**Definició 4.1.1.** A topological space is a pair  $(X, \tau)$ , where  $X$  is a set and  $\tau \subseteq P(X)$  is a family of subsets of  $X$  satisfying the following properties:

- For every  $\mu \subseteq \tau$ ,  $\cup \mu \in \tau$ .
- For every finite  $\mu \subseteq \tau$ ,  $\cap \mu \in \tau$ .
- $\emptyset, X \in \tau$

The elements of  $X$  are called points and the subsets of  $X$  sets. The sets in  $\mu$  will be called *open* sets and their complements *closed* sets. The definition says that the collection of open sets is closed under taking unions, finite intersections and contain the empty set and the whole space. Thus the collection of closed sets is closed under taking intersections and finite unions. The empty set and the whole space are also closed. The subsets of  $X$  which are both open and closed are called *clopen* sets. For instance,  $\emptyset$  and  $X$  are clopen.

In order to define a topology in  $X$  it is quite common to provide a nice subcollection of open sets, instead of providing the whole collection of all open sets. A *base* of  $(X, \tau)$  is a subcollection  $\mu \subseteq \tau$  such that one gets all open sets as unions of sets in the base, i.e., for every  $O \in \tau$  there is  $\mu' \subseteq \mu$  such that  $O = \cup \mu'$ . It is easily checked (and let as an exercise for the reader) that a base  $\mu$  for a topology in  $X$  satisfies the following two properties:

- $X = \cup \mu$ .
- For every  $O_1, O_2 \in \mu$  and for every  $x \in O_1 \cap O_2$  there is  $O_3 \in \mu$  such that  $x \in O_3 \subseteq O_1 \cap O_2$ .

Conversely, given a set  $X$  and  $\mu \subseteq P(X)$  satisfying the two properties above the collection  $\tau = \{\cup \mu' \mid \mu' \subseteq \mu\}$  is a topology on  $X$ . This is again left as an exercise.

**Definició 4.1.2.** Given a subset  $A$  of  $X$ , the *interior* of  $A$ , denoted by  $\overset{\circ}{A}$ , is the biggest open set contained in  $A$ :

$$\overset{\circ}{A} = \cup \{O \mid O \text{ is open and } O \subseteq A\}.$$

The closure of  $A$  is the smallest closed set containing  $A$ :

$$\overline{A} = \cap \{O \mid O \text{ is closed and } A \subseteq O\}.$$

As taking complements turns open sets to closed sets and reverse the inclusions, it is straightforward to check that  $(\overset{\circ}{A})^C = \overline{A^C}$ . Here we use  $A^C$  to denote  $X \setminus A$ , the complement of  $A$  in  $X$ .

A *neighborhood* of a point  $x$  is any set containing an open set containing  $x$ . We let as an exercise to show the following:  $x \in \overset{\circ}{A}$  iff there is a neighborhood of  $x$  contained in  $A$ . Also:  $x \in \overline{A}$  iff every neighborhood of  $x$  intersects (has nonempty intersection with)  $A$ .

**Definició 4.1.3.** A subset of  $X$  is called *dense* if  $\overline{A} = X$ .

Equivalently, a dense set  $A$  is a subset of  $X$  which has nonempty intersection with any nonempty open set. Moreover,  $A$  is dense iff  $A^C$  has empty interior (in words:  $\emptyset$  is the only open set contained in the complement of  $A$ ).

**Definició 4.1.4.** A topological space  $(X, \tau)$  is said to be *Hausdorff* iff given two different points  $x, y \in X$  there are neighborhoods  $O_x \ni x$  and  $O_y \ni y$  of  $x$  and  $y$  respectively such that  $O_x \cap O_y = \emptyset$ .

**Definició 4.1.5.** A subset  $A$  of  $X$  is called *compact* (in  $(X, \tau)$ ) if for every  $\mu \subseteq \tau$  such that  $A \subseteq \cup \mu$  there is a finite subset  $\mu'$  of  $\mu$  with  $A \subseteq \cup \mu'$ . In words: every open covering of  $A$  has a finite subcovering. When  $X$  is compact we say that the topological space  $(X, \mu)$  is compact.

Taking complements, one gets the following characterization (exercise):  $A$  is compact iff for every family of closed set  $\{C_i \mid i \in I\}$  such that  $A \cap \bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset$  there is a finite  $I_0 \subseteq I$  such that  $A \cap \bigcap_{i \in I_0} C_i = \emptyset$ . The space is compact whenever given any family of closed sets with empty intersection one can find a finite subcollection with empty intersection. Every closed set  $C$  of a compact space is compact: if  $(O_i \mid i \in I)$  is an open covering of  $C$ , adding  $C^C$  one gets an open covering of  $X$ . A finite subcovering of  $X$  provides a finite subcovering of  $C$ .

## 4.2 The Baire category theorem

## 4.3 The spaces of types

In this section we assume a theory  $T$  is given, and  $I$  will denote a set of variables.

**Definició 4.3.1.** An  $I$ -type of  $T$  is a set  $\pi$  of  $L_I$  formulas such that  $T \cup \pi$  is consistent.

Hence, by the compactness theorem, a set of  $L_I$ -formulas is an  $I$ -type iff has a realization in a model of  $T$ . Equivalently, iff every finite subset has a realization in a model of  $T$ . This notion is a generalization of type we provided in chapter ..... If  $M$  is a structure and  $A \subseteq M$  consider  $T(A) = \text{Th}(M_A)$ . Then an  $I$ -type of  $M$  over  $A$  is nothing else than a type of the theory  $T(A)$  ??? Is in .... we say that an  $I$ -type is complete iff for every  $L_I$ -formula  $\varphi$  the type contains exactly one of  $\varphi, \neg\varphi$ .

The set of all complete  $I$ -types is denoted by  $S_I^T$ . The space  $S_I^T$  is topologized as follows. For every formula  $\varphi \in L_I$ , consider

$$[\varphi] = \{p \in S_I^T \mid \varphi \in p\}.$$

It is easily checked that  $[\varphi] \cap [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$ , hence  $\{[\varphi] \mid \varphi \in L_I\}$  forms a base of a topology. As  $S_I^T \setminus [\varphi] = [\neg\varphi]$ , the sets of the base are clopen, hence is a totally disconnected space.

As closed sets are intersections of basic clopen sets, any closed set  $C$  is of the form  $C = \bigcap_{\varphi \in \Sigma} [\varphi] = \{p \in S_I^T \mid \Sigma \subseteq p\}$  for a certain set  $\Sigma$  of  $L_I$ -formulas. Hence closed sets correspond to sets of formulas  $\Sigma$ . We will denote the corresponding closed set by  $[\Sigma] = \{p \in S_I^T \mid \Sigma \subseteq p\}$ . One also verifies that  $[\Sigma] = \emptyset$  iff  $T \cup \Sigma$  is inconsistent. Hence closed sets (except the empty set) correspond to types.

**Proposició 4.3.2.** The space  $S_I^T$  is compact.

*Demostració.* Suppose we are given a family  $([\Sigma_i], i \in I)$  of closed sets with empty intersection. Since  $\emptyset = \bigcap_{i \in I} [\Sigma_i] = [\bigcup_{i \in I} \Sigma_i]$  we get that  $\bigcup_{i \in I} \Sigma_i$  is inconsistent with  $T$ . By compactness there is a finite  $I_0 \subseteq I$  such that  $\bigcup_{i \in I_0} \Sigma_i \cup T$  is inconsistent. This means that  $\bigcap_{i \in I_0} [\Sigma_i] = [\bigcup_{i \in I_0} \Sigma_i] = \emptyset$ .  $\square$

*Exercici 4.3.3.* Show the following properties

1.  $[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$
2.  $[\varphi] \subseteq [\psi]$  iff  $T \models \varphi \rightarrow \psi$
3.  $[\varphi] = [\psi]$  iff  $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$
4.  $[\varphi] = S_I^T$  iff  $T \models \varphi$ .

## 4.4 The omitting types theorem

**Definició 4.4.1.** An  $n$ -type  $\pi(\bar{x})$  of  $T$  is *isolated* iff there is a formula  $\varphi(\bar{x})$ , consistent with  $T$ , such that  $T \models \varphi \rightarrow \psi$  for every  $\psi \in \pi$ . This is denoted by  $T \models \varphi \rightarrow \pi$ , and we say that  $\varphi$  isolates  $\pi$  in  $T$ .

The requirement that the formula isolating the type has (at most) the same free variables as the type is avoidable. If  $T \models \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \pi(\bar{x})$  then also  $T \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \pi(\bar{x})$ . This notion has a nice topological translation in the space  $S_n^T$ . The consistency of  $\varphi$  becomes  $\emptyset \neq [\varphi]$ . The fact that  $T \models \varphi \rightarrow \pi$  translates to  $[\varphi] \subseteq [\pi]$ . In other words, an  $n$ -type  $\pi$  is isolated iff the closed set  $[\pi]$  has nonempty interior in the space  $S_n^T$ . As we have seen above this characterization does not depend on the  $n$  chosen. Even more, one gets the same characterization in any space  $S_I^T$  (provided that  $I$  contains the variables of the type). Taking complements, one gets that  $\pi$  is non-isolated iff  $[\pi]^C = S_I^T \setminus [\pi]$  is dense. In other words, non-isolated types correspond (in the space  $S_I^T$ ) to complements of open dense sets<sup>1</sup>.

We say that a structure  $M$  omits a set of formulas  $\Sigma$  if  $M$  does not realize  $\Sigma$ . If  $\Sigma$  is inconsistent with  $T$  then obviously every model of  $T$  omits  $\Sigma$ . The question is: when there is a model of  $T$  that omits a given type (or, more generally, a set of types). If the theory  $T$  is complete and the type  $\pi$  is isolated in  $T$ , it is realized in any model of  $T$ . For, if  $\varphi(\bar{x})$  is consistent with  $T$ , by completeness  $T \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ . Hence in any model of  $T$  there is a tuple satisfying  $\varphi$ . If  $\varphi$  isolates  $\pi$ ,  $T \models \varphi(\bar{x}) \rightarrow \pi(\bar{x})$ , hence any tuple satisfying  $\varphi$  in a model of  $T$  realizes  $\pi$ . Hence, in any model of  $T$  we can find a realization of  $\pi$ . The following theorem provides a sufficient condition in order to omit a collection of types in a countable language.

**Teorema 4.4.2** (Omitting types theorem). *Let  $T$  be a theory in a countable language  $L$ . Let  $P$  be a countable set of non-isolated types, each one in a finite number of variables. There is a model of  $T$  that omits all the types in  $P$ .*

*Demostració.* We are going to fix a countable set of variables  $(x_i \mid i \in I)$  and work in the space  $S_I^T$  of complete types in those variables. We will denote, as usual, the set of all formulas in those free variables by  $L_I$ . For every  $\pi \in P$  let us denote by  $Y_\pi$  the (finite) set of free variables of  $\pi$ . Given a map  $\sigma : Y_\pi \rightarrow I$  let  $p^\sigma$  denote the type obtained by replacing the variables of  $p$  according to  $\sigma$ . More precisely, replacing a variable  $y$  by  $x_{\sigma(y)}$ . It is important to realize that  $\pi^\sigma$  remains non-isolated (in case  $\sigma$  is injective is clear: we are only renaming variables). For, suppose  $Y_\pi = \{y_1, \dots, y_n\}$  and that  $\varphi(x_{\sigma(y_1)}, \dots, x_{\sigma(y_n)})$  isolates  $\pi^\sigma$ . Then one easily checks that the formula

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) \wedge \bigwedge_{\substack{\sigma(y_i) = \sigma(y_j) \\ 1 \leq i < j \leq n}} y_i = y_j$$

isolates  $\pi$ .

Now for every formula  $\varphi(y, \bar{y}) \in L_I$  let  $T_\varphi$  denote the following set

$$T_\varphi = \bigcup_{i \in I} [\exists y \varphi(y, \bar{y}) \rightarrow \varphi(x_i, \bar{y})]$$

*Claim 1.* Each set  $T_\varphi$  is dense.

---

<sup>1</sup>this are the so called closed nowhere dense sets

*Proof.* We have to show that for every  $\psi \in L_I$  consistent with  $T$   $[\psi]$  has nonempty intersection with  $T_\varphi = [\neg\exists y\varphi(y, \bar{y})] \cup \bigcup_{i \in I} [\varphi(x_i, \bar{y})]$ . If  $\psi \wedge \neg\exists y\varphi(y, \bar{y})$  is consistent with  $T$ ,  $[\psi] \cap [\neg\exists y\varphi(y, \bar{y})]$  is nonempty. Otherwise  $T \models \psi \rightarrow \exists y\varphi(y, \bar{y})$  and thus the formula  $\psi \rightarrow \varphi(x_i, \bar{y})$  is consistent with  $T$ , where  $x_i$  denotes a variable different from any of those free variables of  $\psi \rightarrow \exists y\varphi(y, \bar{y})$ . This ends the proof of the claim.

Now consider the following set

$$\bigcap_{\varphi(y, \bar{y}) \in L_I} T_\varphi \cap \bigcap_{\pi \in P} \bigcap_{\sigma \in Y_\pi I} [\pi^\sigma]^C.$$

We already know that each  $T_\varphi$  is dense. Each  $[p^\sigma]^C$  is also dense because the type  $p^\sigma$  is non-isolated. Hence the set above is a countable intersection of open dense sets. By the Baire category theorem it contains a point  $p = p(x_i \mid i \in I)$ . Let  $\bar{a} = (a_i \mid i \in I)$  be a realization of  $p$  in some model  $M$  of  $T$ . We are going to see that  $\{a_i \mid i \in I\}$  is the domain of a model of  $T$  that omits all the types of  $P$ .

*Claim 2.* The set  $\{a_i \mid i \in I\}$  is the domain of an elementary substructure of  $M$ .

*Proof.* We use the Tarski-Vaught test. Suppose  $M \models \exists y\varphi(y, \bar{a})$  for some formula  $\varphi(y, \bar{y}) \in L_I$ . Hence  $p \in [\exists y\varphi(y, \bar{y})]$ . Since  $p$  also belongs to  $T_\varphi$  then  $p \in [\exists y\varphi(y, \bar{y}) \rightarrow \varphi(x_i, \bar{y})]$  for some  $i \in I$ . This implies  $p \in [\varphi(x_i, \bar{y})]$ , hence  $M \models \varphi(a_i, \bar{a})$ . This ends the proof of the claim.

Let us denote by  $N$  this substructure. Obviously  $N$  is a model of  $T$ . The proof ends with the following:

*Claim 3.*  $N$  omits all types in  $P$ .

*Proof.* We show that given any  $\pi = \pi(y_1, \dots, y_n) \in P$ , and any  $\sigma : \{y_1, \dots, y_n\} \rightarrow I$  the subtuple  $(a_{\sigma(y_1)}, \dots, a_{\sigma(y_n)})$  of  $\bar{a}$  does not realize  $\pi$ . As  $\sigma$  is any such map,  $\pi$  is not realized in  $N$ . Since  $p \in [\pi^\sigma]^C = \bigcup_{\varphi \in \pi} [\neg\varphi^\sigma]$ , we get  $\neg\varphi^\sigma \in p$  for some  $\varphi \in \pi$ . But this implies  $M \models \neg\varphi^\sigma(\bar{a})$ . Equivalently  $M \models \neg\varphi(a_{\sigma(y_1)}, \dots, a_{\sigma(y_n)})$ . Hence  $(a_{\sigma(y_1)}, \dots, a_{\sigma(y_n)})$  does not realize  $\pi$ . This ends the proof of the claim. □



# Capítol 5

## Countable models

### 5.1 prime and atomic models

**Definició 5.1.1.** Let  $M$  be a model and  $A \subseteq M$  a set of parameters. We say that  $M$  is prime over  $A$  if every partial elementary map  $f : M \rightarrow N$  with  $A = \text{dom}(f)$  extends to an elementary embedding from  $M$  to  $N$ .

Observe that  $(N, h)$  is a model of  $Th(M_A)$  iff the partial map (with domain  $A$ )  $h : M \rightarrow N$  is elementary. Hence, the models of  $Th(M_A)$  "no son mes que" structure  $N$  elementarily equivalent to  $M$  together with an elementary partial map with domain  $A$ .

An *atom* of a boolean algebra  $B$  is a minimal element  $a \neq 0$ . Equivalently,  $a$  is an atom iff for every  $b \in B$  either  $a \leq b$  or  $a \leq \neg b$ . We are interested in the following boolean algebra, called the Tarski-Lindenbaum algebra. Consider  $L_n$  modulo the following equivalence relation:  $\varphi \sim \psi$  iff  $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$ . It is easily checked that  $\sim$  is compatible with  $\wedge, \vee$  and  $\neg$ . Hence  $L_n / \sim$  is naturally a boolean algebra denoted by  $B_n^T$ . In order to make everything easier we will identify a formula with its class modulo  $\sim$ . This is harmless, since we are going the work only with models of  $T$ . An atom of  $B_n^T$  is (the class of) an  $L_n$ -formula  $\varphi$  consistent with  $T$  such that for every  $L_n$ -formula  $\psi$ , either  $T \models \varphi \rightarrow \psi$  or  $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$ . In other words,  $\varphi$  is a formula consistent with  $T$  isolating  $\{\psi \in L_n \mid T \models \varphi \rightarrow \psi\}$ , a complete type in  $S_n^T$ . Conversely, given an isolated type  $p \in S_n^T$ ,  $\{p\} = [\varphi]$  for some  $\varphi \in L_n$ . This means that  $\varphi$  consistent with  $T$  and  $T \models \varphi \rightarrow p$ . Since  $p$  is complete,  $\varphi$  is an atom. Hence, atoms of  $B_n^T$  are in correspondence with isolated points of  $S_n^T$ .

Let  $T$  be a complete theory,  $M$  a model of  $T$  and  $A \subseteq M$  a set of parameters. We will denote by  $T(A)$  the theory of  $M_A$ .  $T(A)$  is a complete theory in  $L(A)$  extending  $T$ . It is easily checked that any complete theory in  $L(A)$  extending  $T$  is of this kind. Observe that  $S_n^{T(A)} = S_n^M(A)$ . The atoms of  $B_n^{T(A)}$  will be called simply atoms of  $T(A)$ .

**Definició 5.1.2.** Let  $M$  be a structure and  $A \subseteq M$  a set of parameters. We

say that  $M$  is atomic over  $A$  iff for every tuple  $\bar{a} \in M$ ,  $\text{tp}(\bar{a}/A)$  is isolated. Equivalently, every tuple of  $M$  satisfies an atom of  $T(A)$ .

**Lema 5.1.3.** *Let  $M$  be a structure and  $A, B \subseteq M$  sets of parameters. If  $M$  is atomic over  $A$  and  $B$  is finite, then  $M$  is also atomic over  $AB$ .*

*Demostració.* Let  $\bar{a}$  be a tuple in  $M$ . Let  $\bar{b}$  be an enumeration of  $B$ . Since  $M$  is atomic over  $A$ , the tuple  $\bar{a}\bar{b}$  satisfies an atom  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  of  $T(A)$ :  $M_A \models \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow p(\bar{x}, \bar{y})$ , where  $p(\bar{x}, \bar{y})$  is the type of  $\bar{a}\bar{b}$  over  $A$ . Now  $M_{AB} \models \varphi(\bar{x}, \bar{b}) \rightarrow p(\bar{x}, \bar{b})$ . This means that  $\text{tp}(\bar{a}/AB) = p(\bar{x}, \bar{b})$  is isolated by  $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ .  $\square$

**Teorema 5.1.4.** *Let  $T$  be a complete theory in a countable language  $L$ . Let  $M$  be a model of  $T$  and  $A \subseteq M$  a countable set of parameters. Then  $M$  is prime over  $A$  iff  $M$  is atomic over  $A$  and countable.*

*Demostració.* If  $M$  is prime over  $A$ , it is countable, since we can embed  $M$  into a countable model of  $T(A)$ . If  $M$  is not atomic over  $A$ , let  $\bar{a} \in M$  such that  $\text{tp}(\bar{a}/A)$  is not atomic. By the omitting types theorem, let  $(N, h)$  be a model of  $T(A)$  omitting  $\text{tp}(\bar{a}/A)$ . Since  $M$  is prime over  $A$ ,  $h$  may be extended to an elementary embedding  $h : M \rightarrow N$ . But then  $h(\bar{a})$  realizes  $\text{tp}(\bar{a}/A)$ , a contradiction.

Assume now that  $M$  is countable and atomic over  $A$  and there is an elementary map  $f : M \rightarrow N$  with domain  $A$ . Let  $(a_n \mid n \geq 1)$  be an enumeration of  $M \setminus A$ . We are going to build a chain  $(f_n \mid n \in \omega)$  of elementary maps from  $M$  to  $N$  with  $\text{dom}(f_n) = A \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ . Obviously  $\bigcup_{n \in \omega} f_n$  will be an elementary embedding from  $M$  to  $N$ . We start with  $f_0 = f$ . Let us see how to build  $f_{n+1}$  from  $f_n$ . Since  $M$  is atomic over  $\text{dom}(f_n)$ ,  $\text{tp}(a_{n+1}/\text{dom}(f_n))$  is isolated. Hence  $\text{tp}^{f_n}(a_{n+1}/\text{dom}(f_n))$  is also isolated and thus realized by  $b$  in  $N$ . Now we set  $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_{n+1}, b)\}$ .  $\square$

**Proposició 5.1.5.** *Let  $M, N$  be models in a countable language. Let  $A \subseteq M$ ,  $A \subseteq N$  be a set of parameters. If  $M$  and  $N$  are prime over  $A$  and  $M_A \equiv N_A$  then  $M_A$  and  $N_A$  are isomorphic over  $A$ .*

*Demostració.* Let  $(a_n \mid n \in \omega)$  and  $(b_n \mid n \in \omega)$  be enumerations of  $M$  and  $N$  respectively. We are going to build a chain of elementary maps  $(f_n \mid n \in \omega)$  from  $M$  to  $N$  with  $f_0$  the identity on  $A$ ,  $a_n \in \text{dom } f_{n+1}$ ,  $b_n \in \text{rec } f_{n+1}$  and  $f_n \setminus f_0$  finite.  $\square$

The following proposition gives a criteria for existence of prime models of  $T$ .

**Teorema 5.1.6.** *Let  $T$  be a complete theory in a countable language  $L$ . Then  $T$  has a prime model iff for all  $n$ , the set of isolated points is dense in  $S_n^T$ .*

*Demostració.* Assume  $T$  has a prime model  $M$ , and let  $\varphi(\bar{x}) \in L_n$  consistent with  $T$ . Since  $T$  is complete  $T \models \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$  and thus there is a tuple  $\bar{a}$  in  $M$  satisfying  $\varphi(\bar{x})$ . But now, since  $M$  is atomic,  $\text{tp}(\bar{a}/\emptyset)$  is an isolated point in  $[\varphi]$ .

Conversely, assume that the set of isolated points are dense in every space  $S_n^T$ . For each  $n$ , consider the following  $n$ -type:

$$\pi_n = \{\neg\varphi \mid \varphi \in L_n \text{ and } \varphi \text{ is an atom of } T\}.$$

Each  $\pi_n$  is non-isolated in  $T$ . Otherwise, assume that for some  $n$  there is  $\psi \in L_n$  consistent with  $T$  such that  $T \models \psi \rightarrow \pi_n$ . Let, by density of isolated types,  $\varphi \in L_n$  an atom such that  $T \models \varphi \rightarrow \psi$ . But  $\neg\varphi \in \pi_n$  which implies  $T \models \varphi \rightarrow \neg\varphi$ , a contradiction with the consistency of  $\varphi$  with  $T$ . By the omitting types theorem there is a model  $M$  of  $T$  omitting all  $\pi_n$ . Now each tuple of  $M$  satisfies an atom. In other words,  $M$  is atomic.  $\square$

A boolean algebra  $B$  is atomic iff for every  $b \in B$  there is some atom  $a \in B$  such that  $a \leq b$ . Let  $S(B)$  denotes the Stone space of  $B$ . The isolated points are dense in  $S(B)$  iff  $B$  is atomic.

## 5.2 countable saturated models

### 5.3 The Ryll-Nardewski-Svenonious theorem

### 5.4 on the number of countable models

never-two, examples of 3, 4, 5... $w$ ,  $2^w$