

Apunts de Lògica i Fonamentació

Rafel Farré i Cirera

27 de gener de 2005

Índex

1	Introducció a la Teoria de Conjunts	5
1.1	L'axioma d'elecció	5
1.2	El cardinal d'un conjunt	7
1.3	Aritmètica cardina	10
2	Sintaxi de la lògica de primer ordre	13
2.1	Signatura	13
2.2	Termes	14
2.3	Fórmules	15
2.3.1	variables lliures	17
2.3.2	substitucions	17
3	Semàntica de la lògica de primer ordre	19
3.1	Estructures i assignacions	19
3.2	Validesa d'una fórmula	20
3.3	Classes elementals i Δ -elemental	22
3.4	Definibilitat	23
3.5	El teorema de l'homomorfisme	24
3.6	Conseqüència Lògica	25
3.7	El Lema de substitució	26
4	Deducció natural	29
4.1	Les regles de la deducció natural	29
4.2	Deduccions	31
4.3	El teorema d'adequació	33
4.4	Algunes propietats de \vdash	33
4.4.1	el tall	35
4.4.2	generalització de les constants	35
4.5	Regles deduïdes	36
5	Un càlcul deductiu tipus Hilbert	39
5.1	Axiomes lògics	39
5.2	deduccions	40
5.3	El teorema d'adequació	41

5.4	Algunes propietats de \vdash	41
5.4.1	el teorema de generalització de les constants	44
6	El Teorema de Completesa	47
7	Introducció a la teoria a models	51
7.1	Els teoremes de Compacitat i Löwenheim-Skolem	51
7.2	Equivalència elemental i teories completes	52

Capítol 1

Introducció a la Teoria de Conjunts

Nota

En un curs estàndard d'introducció als conjunts s'acostuma a començar pels ordinals, una habitual per a l'estudi de l'aritmètica cardinal. Aquí només he volgut fer una molt breu introducció a l'axioma d'elecció i a l'aritmètica cardinal. El fet de no aprofundir en aquest últim tema (no tracto cofinalitats, per exemple) em permet evitar els ordinals. Això em porta, però, a cometre una petita incorrecció i donar una definició de cardinal en desús per inconsistent. Això no és greu: tot s'arregla pensant que no defineixo pròpiament els cardinals sinó la relació 'tenir el mateix cardinal' encara que no ho vull fer així perquè els enunciats resulten innecessàriament artificiosos. Deixo com a exercici per al lector avançat fer-ne una traducció a aquest llenguatge.

Tampoc entro en el tema de les classes pròpies: encara que un enunciat o un argument donat literalment pugui semblar incorrecte a un coneixedor del tema (per exemple: apliquem un axioma de conjunts a una classe pròpia), una modificació menor de l'argumentació ho resol. També ho deixo com exercici per a aquest lector avançat. La filosofia darrera de tot això és: no expliquis una dificultat (fàcilment solventable) quan el lector no la veu.

1.1 L'axioma d'elecció

L'objectiu d'aquesta secció és fer una breu introducció a l'axioma d'elecció i la seva utilització en les matemàtiques actuals. També veurem la seva relació amb altres principis, com el 'Lema' de Zorn i el principi de bona ordenació.

Una funció d'elecció per una família de conjunts $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ és una funció $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ tal que $f(i) \in X_i$ per a tot $i \in I$. Per exemple, si $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ és la col·lecció de tots els subconjunts de \mathbb{N} la funció $f(i) = \min X_i$ és una funció d'elecció per a la família. En canvi, si pensem en la col·lecció de tots els subconjunts de \mathbb{R} costa donar una funció d'elecció. De fet no hi ha manera de construir-ne una explícitament. Sembla però intuïtivament clar que si els conjunts són no buits hauria d'existir una tal funció. L'axioma d'elecció ens assegura precisament que tota família de conjunts no buits té alguna funció d'elecció. Això permet fer infinites tries al mateix temps sense necessitat d'explicitar quin element triem en cada cas.

Definició 1.1.1 (Axioma d'Elecció). Tota família de conjunts no buits té alguna funció d'elecció.

Observem que l'Axioma d'elecció diu exactament que el producte cartesià de conjunts no buits és no buit. Quan hi ha un nombre finit de conjunts no cal aplicar l'axioma d'elecció per tal d'assegurar que hi ha funcions d'elecció, es pot demostrar fàcilment l'existència per inducció.

Exercici 1.1.2. Demostreu que l'axioma d'elecció és equivalent al principi següent: Donat X no buit, existeix $f : P(X) \rightarrow X$ tal que $f(Y) \in Y$ per tot $Y \in P(X) \setminus \{\emptyset\}$.

L'axioma d'elecció també és equivalent al Lema de Zorn i al principi de bona ordenació com veurem a continuació. El lema de Zorn és un principi menys intuïtiu que l'axioma d'elecció però força útil a l'hora d'aplicar-lo. Fixem primer la terminologia. Un conjunt parcialment ordenat (X, \leq) es diu *inductiu* si tota *cadena* (subconjunt totalment ordenat) té cotes superiors. Quan tot subconjunt té mínim es diu que el conjunt està *ben ordenat*.

Definició 1.1.3. Lema Zorn Tot conjunt parcialment ordenat inductiu i no buit té elements maximals.

Principi de bona ordenació Tot conjunt admet un bon ordre.

Teorema 1.1.4. *L'Axioma d'elecció, el Lema de Zorn i el Principi de bona ordenació són equivalents.*

Demostració. Només demostrarem $LZ \Rightarrow PBO \Rightarrow AE$. La implicació $AE \Rightarrow LZ$ és fàcil un cop s'han introduït els ordinals (o s'ha vist que hi ha conjunts ben ordenats arbitràriament grans), cosa que ens volem estalviar. Sense els ordinals la demostració és força enrevessada i la ometrem.

$PBO \Rightarrow AE$. Si $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ és una família de conjunts no buits, prenent un bon ordre en $\bigcup_{i \in I} X_i$ podem definir una funció d'elecció així: $f(i) = \min X_i$.

$LZ \Rightarrow PBO$. Sigui X no buit. Considerem

$$S := \{(A, R) \mid A \subseteq X, R \text{ és un bon ordre en } A\}$$

ordenat per:

$$(A, R) \leq (A', R') \text{ sii}$$

$A \subseteq A'$, la restricció de R' a A és R i A és un segment inicial de A' per R' .

(S, \leq) és un conjunt parcialment ordenat i no buit. Veiem que també és inductiu. Si $\{(A_i, R_i) \mid i \in I\}$ és una cadena d'elements de (S, \leq) , prenem $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ i $R := \bigcup_{i \in I} R_i$. És fàcil comprovar que R ordena parcialment A . Veiem que a més és un bon ordre. Sigui B un subconjunt de A no buit. prenem i_0 tal que $A_{i_0} \cap B$ és no buit i notem per a el mínim de $A_{i_0} \cap B$ per R . Només cal comprovar que a és el mínim de B per R . Si hi hagués un $b \in B$ menor que a per R , b no pot estar a A_{i_0} perquè a és el mínim de $A_{i_0} \cap B$, i per tant b no està en cap A_i contingut en A_{i_0} . Però tampoc pot estar en cap A_i que contingui A_{i_0} perquè aquest últim és un segment inicial de A_i .

Pel lema de Zorn, (S, \leq) té elements maximals i sigui (A, R) un d'ells. La demostració acaba veient que $A = X$. Si no, prenem $b \in X \setminus A$ i R' l'extensió de R a $A' := A \cup \{b\}$ que fa que b sigui més gran que tot element de A . Com que $(A, R) < (A', R') \in S$ arribem a una contradicció amb la maximalitat de (A, R) . \square

L'axioma d'elecció, durant molt de temps, ha estat posat en dubte pel seu caràcter no constructiu. El seu us, però, i de forma inconscient, és més habitual del que en un primer moment podem pensar. Per exemple, de manera implícita, ningú pensa que el producte cartesià de conjunts no buits pugui ésser buit (si el producte cartesià d'un nombre finit no ho és, més encara el d'un nombre infinit...), i aquest fet és precisament el que diu l'axioma d'elecció. No només això, sinó que el seu us està molt estès. Per exemple, tots sabem (i això pertany a les beceroles d'un curs de càlcul de primer any) que una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua en un punt $a \in \mathbb{R}$ si i només si per a tota successió $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ que tendeix a a la successió de les imatges $\langle f(x_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ tendeix a $f(a)$. Aquest senzill fet no es pot demostrar sense l'axioma d'elecció (exercici: feu-ne una demostració i descobriu on useu AE). Per exemple, el fet que tot cos té una única clausura algebraica necessita de l'axioma d'elecció tant a l'hora de provar l'existència com a l'hora de provar la unicitat. D'altra banda, té conseqüències 'negatives' o no desitjables: L'existència de conjunts de reals no mesurables de Lebesgue; els enunciats d'un curs d'integració deixarien de començar per 'Si S és mesurable...'. Qui no s'ha preguntat: Si hi ha subconjunts de reals no mesurables, perquè no me n'ensenyen un? On són els conjunts no mesurables, si a l'hora de la veritat, tot el que surt és mesurable...

1.2 El cardinal d'un conjunt

En aquesta secció introduïrem els nombres cardinals, el cardinal d'un conjunt i les operacions aritmètiques bàsiques amb els nombres cardinals. Assumirem (com és habitual en matemàtiques) l'Axioma d'Elecció i per tant també el Lema de Zorn, tot i remarcant-ho quan en fem us. La idea bàsica és que dos conjunts tenen el mateix cardinal quan hi ha una bijecció entre ells.

Comencem introduint una mica de terminologia. Donats dos conjunts X, Y qualssevol, direm que X està dominat per Y (en símbols: $X \preceq Y$) si existeix

una aplicació injectiva de X en Y . Quan existeixi una bijecció entre X i Y direm que X és equipotent a Y (en símbols: $X \sim Y$).

Definició 1.2.1 (conjunt infinit). Un conjunt X és *infinit* sii existeix una funció injectiva i no exhaustiva de X en X .

És fàcil veure (ho deixo com a exercici) que un conjunt infinit és aquell que és equipotent a un subconjunt propi seu. Els conjunts finits seran òbviament els que no són infinits i per tant, per definició són aquells per els quals tota aplicació injectiva és exhaustiva (o equivalentment, aquells que no contenen un subconjunt propi equipotent).

Exercici 1.2.2. Demostreu que $X \preceq Y$ sii existeix una aplicació exhaustiva de Y en X . Observeu que utilitzeu l'axioma d'elecció.

La proposició següent ve a dir que el conjunt dels naturals és el conjunt infinit 'més petit' que hi ha. De fet diu exactament que el cardinal del naturals (numerable) és el cardinal infinit més petit que hi ha.

Proposició 1.2.3. X és infinit sii $\mathbb{N} \preceq X$.

Demostració. Si $f : X \rightarrow X$ és una funció injectiva i no exhaustiva, prenem $a \in X \setminus f(X)$ i definim $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ així $g(n) := f^n(a)$. Llavors g és injectiva perquè f ho és: si $f^n(a) = f^m(a)$ per $m > n$, $f^n(a) = f^n(f^{m-n}(a))$ i llavors per injectivitat de f $a = f^{m-n}(a)$, contradicció.

Recíprocament, si hi ha una aplicació $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ injectiva, definim una funció $f : X \rightarrow X$ de la manera següent: f és la identitat fora de $g(\mathbb{N})$ i $g(x) = g(g^{-1}(n) + 1)$ si $x \in g(\mathbb{N})$. És fàcil comprovar que f és injectiva i no exhaustiva, doncs $g(0) \notin f(X)$. \square

Exercici 1.2.4. Demostreu que un conjunt és finit sii és equipotent a $\{1, \dots, n\}$ per a un cert $n \in \mathbb{N}$. Aquest n és únic (perquè?) i és el que normalment anomenem cardinal o nombre d'elements.

Com podem veure en aquest exercici, hi ha una manera més 'precisa' (i còmoda de usar) de definir els cardinals: triant un representant adequat a la \sim -classe d'equivalència. En el cas infinit es pot fer el mateix usant els ordinals.

Definició 1.2.5 (nombres cardinals. Cardinal d'un conjunt). 'Ser equipotent' (la relació \sim) és una relació d'equivalència i les classes d'aquesta relació reben el nom de *cardinals*. El cardinal d'un conjunt X , que denotarem per $|X|$ és la seva \sim -classe d'equivalència.

Observem que, per definició, dos conjunts tenen el mateix cardinal sii són equipotents; en símbols: $|X| = |Y|$ sii $X \sim Y$.

Quan un conjunt té mes elements que un altre? En el cas finit té una resposta molt senzilla: quan hi ha una aplicació injectiva no exhaustiva del 'petit' en el 'gran'. En el cas d'un conjunt infinit, aquesta definició ens porta directament a l'absurd de que un conjunt té 'més elements' que ell mateix. Hi ha una solució senzilla: definit la relació 'menor o igual' enlloc de 'menor estricta':

$|X| \leq |Y|$ sii $X \preceq Y$. Si ho fem així, es rutinari verificar que aquesta relació entre cardinals està ben definida i satisfà les propietats reflexiva i transitiva. El resultat següent ens diu que també satisfà la antisimetria, i per tant és una relació d'ordre parcial.

Teorema 1.2.6 (Schröder-Bernstein). *Si $X \preceq Y$ i $Y \preceq X$ llavors X és equipotent a Y .*

Definició 1.2.7 (relació d'ordre entre cardinals). Donats dos conjunts X, Y

$$|X| \leq |Y| \quad \text{sii} \quad X \preceq Y.$$

Demostració de 1.2.6. Siguin $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$ injectives. Trencarem X i Y en tres trossos $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ de manera que $f \upharpoonright (X_1 \cup X_3) \cup g^{-1} \upharpoonright X_2$ és una bijecció de X en Y .

Donat un element $x \in X$ direm que neix a X si $x = (g \circ f)^n(x')$ per a uns certs $x' \in X \setminus g(Y)$ i n natural; si $x = (g \circ f)^n(g(y))$ per uns certs $y \in Y \setminus f(X)$ i n direm que x neix a Y . Això descriu el procés següent: si x no és de la imatge de g diem que neix a X , altrament té una única antiimatge y per g . Si aquest y no és de la imatge de f llavors x neix a Y altrament té una única antiimatge x_1 per f ... Anàlogament es defineix per un element de Y . Observem que un element no pot néixer a X i Y al mateix temps, però poden haver-hi elements que no neixen enlloc. Si notem per N_X els elements de $X \cup Y$ que neixen a X i N_Y és que neixen a Y les particions són: $X_1 := X \cap N_X$, $X_2 := X \cap N_Y$, $X_3 := X \setminus (X_1 \cup X_2)$, $Y_1 := Y \cap N_X$, $Y_2 := Y \cap N_Y$, $Y_3 := Y \setminus (Y_1 \cup Y_2)$. Ara podem comprovar que f ens dona una bijecció entre X_1 i Y_1 i també una bijecció entre X_3 i Y_3 , mentre que g ens dona una bijecció entre Y_2 i X_2 . La raó és que tant f com g preserven el fet d'haver nascut en algun lloc, els elements de Y que han nascut a X són de la imatge de f , els de X que han nascut a Y són de la imatge de g i els que no han nascut enlloc són de les dues imatges. \square

Observació 1.2.8. Si ens hi fixem bé, de fet hem provat que si f és una injecció de X en Y y g una injecció de Y en X llavors es poden partir tant X com Y en dos trossos $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$ de manera que f ens dona una bijecció de X_1 en Y_1 y g ens dona una bijecció entre Y_2 i X_2 . Si apliquem això a un quadrat i un cercle obtenim que es poden partir en dos trossos, cada un d'ells bijectable amb el corresponent mitjançant translació més homotècia (que preserva la forma!).

El següent teorema, la llei de tricotomia, ens diu que l'ordre entre els cardinals de fet és un ordre total.

Teorema 1.2.9 (Llei de tricotomia). *Donats X, Y no buits o bé $X \preceq Y$ o bé $Y \preceq X$.*

Demostració. És la típica aplicació del Lema de Zorn. Considerem el conjunt següent:

$$S := \{f \mid f \text{ és una bijecció entre un subconjunt de } X \text{ i un subconjunt de } Y\},$$

ordenat per inclusió (mirem una aplicació com un conjunt de parelles ordenades, és a dir $f \leq g$ sii g estén f).

Veurem que un element maximal ens dona la injecció buscada. (S, \leq) és parcialment ordenat i no buit, veiem que és inductiu. Si $C = \{f_i \mid i \in I\}$ és una cadena prenem $f := \bigcup_{i \in I} f_i$ (el compost de totes les aplicacions f_i). És fàcil veure que $f \in S$ i que $f_i \leq f$; per tant f és una cota superior de la cadena. Pel Lema de Zorn prenem g maximal de (S, \leq) . Tot es redueix a veure que o bé el domini de g és X (i en aquest cas f és una injecció de X en Y) o bé la imatge de g és Y (i en aquest cas g^{-1} és una injecció de Y en X). Si no fos així, prenem $x \in X$ que no sigui del domini de g i $y \in Y$ que no sigui de la imatge de g : posant $f = g \cup \{(x, y)\}$ tenim que $g < f$, contradicció amb la maximalitat de g . \square

Es pot demostrar (i no ho farem aquí) que de fet els cardinals estan ben ordenats. Així, sempre hi ha un primer cardinal més gran que un conjunt de cardinals donats. En particular, tot cardinal té següent: el mínim de tots els cardinals més grans que ell. Per 1.2.3, El primer cardinal infinit és el numerable (el cardinal de \mathbb{N}), que es denota per \aleph_0 . El següent es denota per \aleph_1 . Iterant els següents anem obtenint $\aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \aleph_5, \dots$. Què passa quan ja tenim tots els $\{\aleph_n \mid n \in \mathbb{N}\}$? Doncs que hi ha un primer cardinal més gran que tots els $\{\aleph_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ que es denota per \aleph_ω . Si continuem la successió de següents anem obtenint $\aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \aleph_{\omega+3}, \dots$. Un cop obtinguts tots els $\{\aleph_{\omega+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'hi ha un que vindrà immediatament per sobre de tots ells. El denotarem per $\aleph_{2\omega}$. Si anem continuant aquesta successió anem obtenint $\aleph_{2\omega+1}, \aleph_{2\omega+2}, \aleph_{2\omega+3}, \dots, \aleph_{3\omega}, \dots$

Exercici 1.2.10. intenteu definir $\aleph_{\omega^2}, \aleph_{\omega^3}, \dots$ i \aleph_{ω^ω} .

En tota aquesta argumentació he pressuposat que sempre hi ha un cardinal més gran que un cardinal donat (i que un conjunt de cardinals donats). Això és una conseqüència del teorema de Cantor, que entre altres coses diu que la successió dels àlefs no té fi.

Proposició 1.2.11 (Teorema Cantor). $|X| < |(P(X))|$.

Demostració. $P(X)$ denota les parts de X . Òbviament $|X| \leq |(P(X))|$. Si fos igual, hi hauria una bijecció $f : X \rightarrow P(X)$. Això és contradictori: si $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ i $y \in X$ amb $f(y) = Y$ és fàcil comprovar que $y \in Y$ sii $y \notin f(y) = Y$. \square

Nota: paradoxa de Buralli-Forti? i paradoxa de Russel—

1.3 Aritmètica cardina

L'aritmètica cardinal infinita es defineix de la mateixa manera que la finita i veurem que les operacions de suma i producte són més senzilles que en el cas finit.

A la proposició següent \sqcup denota la unió disjunta ($X \sqcup Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$) i ${}^Y X$ denota el conjunt d'aplicacions de Y en X .

Definició 1.3.1. • $|X| + |Y| := |X \sqcup Y|$

- $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$
- $|X|^{|Y|} := |{}^Y X|$

És fàcil comprovar que aquestes definicions no depenen del representant triat i ho deixem com a exercici per el lector.

Els cardinals els denotarem per $\lambda, \kappa, \mu, \dots$

És fàcil comprovar que les operacions aritmètiques definides tenen les propietats associativa i commutativa de la suma i el producte, la distributivitat del producte respecte a la suma així com $\lambda^{(\mu+\kappa)} = \lambda^\mu \lambda^\kappa$ i $(\lambda^\mu)^\kappa = \lambda^{\mu\kappa}$. Per veure la penúltima, prenem X, Y, Z disjunts tals que $|X| = \lambda$, $|Y| = \mu$ i $|Z| = \kappa$. Llavors $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \cup f_2$ és una bijecció entre ${}^Y X \times {}^Z X$ i ${}^{Y \cup Z} X$. La resta de comprovacions són anàlogues i les deixem també com a exercici.

Tampoc resulta difícil comprovar que es preserven les desigualtats no estrictes: si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ i $\mu_1 \leq \mu_2$ llavors $\lambda_1 + \mu_1 \leq \lambda_2 + \mu_2$, $\lambda_1 \mu_1 \leq \lambda_2 \mu_2$ i $\lambda_1^{\mu_1} \leq \lambda_2^{\mu_2}$. No passa el mateix amb les desigualtats estrictes. Per exemple $2\aleph_0 = 3\aleph_0 = \dots = \aleph_0 \aleph_0$.

Lema 1.3.2. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostració. Si recorrem els punts de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seguint les rectes del tipus $x + y = n$ en sentit dreta-esquerra començant per $n = 0$ i anant incrementant la n obtenim la bijecció d'equacions $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida per $f(n, m) = m + \frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$. Deixem com a exercici per el lector demostrar analíticament que f és una bijecció. \square

Teorema 1.3.3. Si λ és un cardinal infinit, llavors $\lambda^2 = \lambda$.

Demostració. Comencem observant que si μ és un cardinal per al qual $\mu^2 = \mu$, llavors també $n\mu = \mu$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ no nul: $\mu \leq n\mu \leq \mu^2 = \mu$, ja que les desigualtats es preserven al multiplicar.

Per demostrar el teorema, si $\lambda = |X|$ hem de trobar una bijecció de $X \times X$ en X amb l'ajut del lema de Zorn. Considerem

$$S := \{(A, f) \mid A \subseteq X, A \text{ és infinit i } f : A \rightarrow A \times A \text{ bijectiva}\}$$

ordenat per

$$(A, f) \leq (B, g) \text{ sii } A \subseteq B \text{ i } g \text{ extén } f.$$

(S, \leq) és parcialment ordenat, i inductiu: si $\{(A_i, f_i) \mid i \in I\}$ és una cadena de S es comprova que $(\bigcup A_i, \bigcup f_i) \in S$ n'és una cota superior. S és no buit: com que X és infinit, per 1.2.3 conté un subconjunt A equipotent als naturals i per 1.3.2 és equipotent a $A \times A$.

Sigui (B, g) un element maximal de (S, \leq) . Si veiem que $|B| = \lambda$ ja haurem acabat. Suposem el contrari: $|B| < \lambda$ i denotem per μ el cardinal de B . Com que $\mu^2 = \mu$, també $2\mu = 3\mu = \mu$. A més $|X \setminus B| > \mu$, altrament $\lambda = |B| + |X \setminus B| \leq 2\mu = \mu$, absurd. Prenem $C \subseteq X \setminus B$ amb $|C| = \mu$ (exercici: justificar que C existeix). Observem que $|B \times C| = |C \times B| = |C \times C| = \mu^2 = \mu$ i també

$|B \times C \cup C \times B \cup C \times C| = 3\mu = \mu$ i per tant existeix $h : C \rightarrow B \times C \cup C \times B \cup C \times C$ bijectiva. Prenent $A := B \cup C$ i $f := g \cup h$ tenim que $(B, g) < (A, f) \in S$, contradicció. \square

Corollari 1.3.4. *Siguin λ, μ dos cardinals diferents de zero.*

1. *Si algun d'ells és infinit llavors $\lambda + \mu = \lambda\mu = \max\{\lambda, \mu\}$.*
2. *Si λ és infinit i $n \in \mathbb{N}$ llavors $\lambda^n = \lambda$.*

Demostració. Suposem $\lambda \leq \mu$. Llavors $\mu \leq \lambda + \mu \leq 2\mu \leq \mu^2 = \mu$ i $\mu \leq \lambda\mu \leq \mu^2 = \mu$. L'altre es fa per inducció. \square

Corollari 1.3.5. *Si X és infinit, el nombre de successions finites d'elements de X és $|X|$.*

Demostració. Les successions finites de X es poden identificar amb $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$. Com que $|X^n| = |X|$, prenem f_n una bijecció entre X^n i X . Llavors, l'aplicació

$$f : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \rightarrow X \times \mathbb{N}$$

definida per $f(x_1, \dots, x_n) = (f_n(x_1, \dots, x_n), n)$ és bijectiva i per tant

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n \right| = \aleph_0 |X| = |X|$$

.

\square

Corollari 1.3.6. *Si λ és infinit, $2^\lambda = \lambda^\lambda$.*

Demostració. $2^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda^2} = 2^\lambda$. \square

Capítol 2

Sintaxi de la lògica de primer ordre

Començarem introduint la sintaxi dels llenguatges de primer ordre. L'objectiu és construir un llenguatge formal per expressar enunciats matemàtics, o més precisament propietats d'estructures matemàtiques. A aquests enunciats en direm fórmules (de primer ordre). Les fórmules seran seqüències finites de certs símbols. Hi haurà una sèrie de símbols que poden aparèixer en qualsevol situació, com per exemple $, \forall, \rightarrow, \dots$ i altres que dependran de l'estructura matemàtica de la que parlem. Si parlem de grups necessitarem un símbol específic pel producte i un pel neutre. Si parlem de relacions d'equivalència necessitarem un símbol per denotar la relació, si parlem de cossos ordenats necessitarem símbols per la suma, el producte, el neutre de la suma, el neutre del producte i la relació d'ordre. En general necessitarem tres tipus de símbols específics: per a denotar elements distingits (símbols de constant), per a denotar operacions (símbols funcionals) i per a denotar relacions (símbols de relació o predicats). Aquests símbols solen rebre el nom de símbols no lògics i determinen el que s'en diu la signatura i que dependrà doncs del tipus d'estructura del que parlem.

2.1 Signatura

Definició 2.1.1. Una *Signatura* S consta d'un conjunt \mathcal{C} de símbols de constant, un conjunt \mathcal{F} de símbols funcionals, un conjunt \mathcal{R} de símbols de relació (o predicats) a més de la funció arietat $\tau : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$. Els conjunts \mathcal{C} , \mathcal{F} i \mathcal{R} han de ser disjunts.

Formalment $S = \langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, \tau \rangle$, però com que normalment la arietat quedarà clara pel context escriurem $S = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$. Els elements $f \in \mathcal{F}$ només són símbols de funció, però quan estudiem la semàntica veurem que s'interpretaran (en una estructura) com una funció. La seva arietat $\tau(f)$ serà el nombre de variables de l'esmentada funció. El mateix passarà amb els símbols de relació.

Apart dels símbols no lògics (els específics de la signatura) també necessitarem símbols per denotar les connectives lògiques: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$, els quantificadors: \forall, \exists , un símbol per denotar la igualtat: \approx , un conjunt numerable de símbols de variable: $V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ i finalment els parèntesis: $(,)$.

Notació 2.1.2. A_S denotarà el conjunt de tots els símbols, i.e.,

$$A_S := \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \exists, \forall, \approx, (,)\} \cup V \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$$

i A_S^* denotarà el conjunt de seqüències finites dels símbols de A_S .

Les fórmules seran certs elements de A_S^* ‘ben construïts’.

2.2 Termes

Abans de construir les fórmules hem de construir els termes, que serveixen per designar elements. Cada signatura tindrà el seu conjunt de termes, que també serà un cert subconjunt de A_S^* .

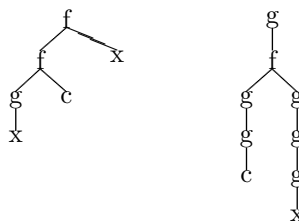
D’ara endavant S serà una signatura fixada.

Definició 2.2.1 (termes). El conjunt T_S dels S -termes és el mínim subconjunt X de A_S^* que conté $V \cup \mathcal{C}$ i és tancat per aplicació de funcionals, és a dir, si $t_1, \dots, t_n \in X$ i f és un símbol funcional n -ari de S llavors $ft_1 \dots t_n \in X$. Més precisament:

$$T_S := \bigcap \{X \mid \mathcal{C} \cup V \subseteq X \text{ i } X \text{ és tancat per aplicació de funcionals de } S\}$$

Exemple 2.2.2. Si S conté un símbol de constant c i símbols funcionals f, g d’arietat 2 i 1 respectivament, llavors $t := ffgxcx$ i $u := gfggcgggx$ són S -termes. De manera informal, i per a facilitar-ne la lectura (de fet són innecessaris, hi ha una sola manera de ‘llegir’ els termes)¹, a vegades introduïrem parèntesis i comes auxiliars. Així els termes anteriors els escriurem també $f(f(g(x), c), x)$ i $g(f(g(g(c)), g(g(g(x)))))$.

Els termes també es poden representar com arbres, les fulles del qual són variables i constants i un pare s’obté per aplicació de funcionals. Per exemple, els arbres de l’exemple 2.2.2 serien:



¹Per a tot terme t estem en exactament una de les tres situacions següents: o bé t és una constant, o bé t és una variable o bé hi ha un únic $f \in \mathcal{F}$ i termes t_1, \dots, t_n (unívocament determinats) tals que $t = ft_1 \dots t_n$

El següent principi d'inducció és immediat:

Proposició 2.2.3 (Principi d'inducció). *Si $X \subseteq T_S$ conté $\mathcal{C} \cup V$ i és tancat per aplicació de funcionals llavors $X = T_S$.*

Si volem veure que tots els termes tenen una propietat P només harem de veure que les variables i les constants la tenen i que si t_1, \dots, t_n tenen la propietat P llavors $ft_1 \dots t_n$ també la té (es suposa que $f \in \mathcal{F}$ és n -ari).

Constantment en trobarem amb la necessitat de definir funcions sobre els termes, és a dir, amb domini T_S . Això ens ho permetrà fer el principi de recursió que enunciem a continuació sense demostració. Això és conseqüència del fet que hi hagi una única manera de 'llegir' els termes.

Proposició 2.2.4 (Principi de recursió). *Suposem que X és un conjunt i per cada $f \in \mathcal{F}$ tenim definida una funció $H_f : X^n \rightarrow X$, on $n = \tau(f)$. Llavors tota $F : V \cup \mathcal{C} \rightarrow X$ s'extén de manera única a $\bar{F} : T_S \rightarrow X$ amb la condició que $\bar{F}(f(t_1, \dots, t_n)) = H_f(\bar{F}(t_1), \dots, \bar{F}(t_n))$.*

Veiem-ne un exemple de com s'aplica.

Definició 2.2.5 (substitucions). Volem definir la substitució en un terme t de totes les ocurrencies de la variable x per un terme u , i que denotarem per t_u^x . Si fixem x i u el que volem és definir la funció $F : T_S \rightarrow T_S$ que a t l'hi assigna t_u^x . Definim primer la substitució de les constants i les variables:

- Si t és una constant o una variable diferent de x , llavors $t_u^x := t$.
- Si $t = x$, llavors $t_u^x := u$.

Amb això hem definit F sobre $V \cup \mathcal{C}$. Ara l'hem d'estendre a tot T_S amb la clàusula següent:

- Si $t = ft_1 \dots t_n$, llavors $t_u^x := ft_{1_u^x} \dots t_{n_u^x}$.

Aquesta última clàusula diu que $\bar{F}(ft_1 \dots t_n) = H_f(\bar{F}(t_1), \dots, \bar{F}(t_n))$, on $H_f : T_S^n \rightarrow T_S$ ve definida per $H_f(t_1, \dots, t_n) = ft_1 \dots t_n$.

Exemple 2.2.6. Tornant a l'exemple 2.2.2, $t_u^x = ffggfgggxcgccfgggxggc$ i $u_t^x = gfgggffgxcggc$. Quan ho representem en forma d'arbre, la substitució t_u^x enganxa u a cada fulla x de t .

Exemple 2.2.7. Anem a veure que t_u^x és un terme. Ho fem per inducció sobre t deixant x i u fixos. Si t és variable o constant és clar ja que u també és terme. Si $t = ft_1 \dots t_n$, llavors $t_u^x = ft_{1_u^x} \dots t_{n_u^x}$ és un terme ja que per hipòtesi d'inducció $t_{1_u^x}, \dots, t_{n_u^x}$ ho són.

2.3 Fórmules

Les S -fórmules també són certs elements de A_S^* . Les fórmules més senzilles a partir de les quals es construeixen les altres són les fórmules atòmiques.

Definició 2.3.1 (fórmules atòmiques). Les fórmules *atòmiques* de S , AT_S , són les següents:

- $rt_1 \cdots t_n$, on $r \in \mathcal{R}$, $t_1, \dots, t_n \in T_S$ i $\tau(r) = n$
- $t_1 \approx t_2$, on $t_1, t_2 \in T_S$.

A vegades les fórmules del tipus $rt_1 \cdots t_n$ les escriurem $r(t_1, \dots, t_n)$ per tal de facilitar-ne la lectura. A les fórmules del segon tipus és habitual anomenar-les equacions.

El conjunt F_S de totes les S -fórmules s'obté a partir de les atòmiques aplicant connectives i quantificadors:

Definició 2.3.2 (fórmules). El conjunt F_S de les S -fórmules és el mínim subconjunt X de A_S^* tal que:

- $AT_S \subseteq X$
- és tancat per aplicació de la negació: Si $\varphi \in X$ llavors $\neg\varphi \in X$
- és tancat per aplicació de les connectives binàries: Si $\varphi, \psi \in X$ llavors $(\varphi * \psi) \in X$, on $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- és tancat per aplicació de quantificadors: si $\varphi \in X$, $x \in V$ i $Q \in \{\forall, \exists\}$ llavors $Qx\varphi \in X$

Exemple 2.3.3. $\forall x \exists y (x \approx y \rightarrow \forall z (rxy \wedge \neg rzx))$

De manera anàloga als termes, les fórmules tenen un principi d'inducció i un principi de recursió. També hi ha una única manera de 'llegir' les fórmules anàlogament a com passa amb els termes (exercici: enuncieu-lo). Això no diu més que hem posat prou parèntesis durant la construcció. De manera informal, i per tal de facilitar-ne la lectura, ens permetrem introduir-ne de nous.

Proposició 2.3.4 (principi inducció). *Si $X \subseteq F_S$ conté les S -fórmules atòmiques i és tancat per aplicació de les connectives lògiques i els quantificadors llavors $X = F_S$*

Per demostrar que totes les fórmules satisfan una certa propietat n'hi haurà prou amb veure que la satisfan les atòmiques i que la propietat es preserva tant per aplicació de les connectives lògiques com dels quantificadors.

Exemple 2.3.5. Anem a veure que tota fórmula té el mateix nombre de parèntesis (que). Per les atòmiques és obvi, ja que no en tenen. Per a les connectives binàries es preserva doncs n'afegim un de cada tipus. Per a la negació i els quantificadors també es preserva perquè no afegim cap parèntesi.

Proposició 2.3.6 (principi de recursió). *Suposem que X és un conjunt, que tenim definida una funció: $H_{\neg} : X \rightarrow X$, que per cada $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ tenim definida una funció $H_* : X^2 \rightarrow X$ i que per cada $Q \in \{\forall, \exists\}$ i $x \in V$ tenim definida una funció $H_{Qx} : X \rightarrow X$. Llavors tota $F : AT_S \rightarrow X$ s'extén de manera única a $\bar{F} : F_S \rightarrow X$ satisfent les condicions següents:*

- $\overline{F}(\neg\varphi) = H_-(\overline{F}(\varphi))$
- $\overline{F}((\varphi * \psi)) = H_*(\overline{F}(\varphi), \overline{F}(\psi))$
- $\overline{F}(Qx\varphi) = H_{Qx}(\overline{F}(\varphi))$.

A continuació en donarem dos exemples molt importants de com s'aplica.

2.3.1 variables lliures

El conjunt $VL(\varphi)$ de les variables lliures d'una fórmula $\varphi \in F_S$ es defineix per recursió de la manera següent:

Definició 2.3.7 (variables lliures). • Si φ és atòmica, $VL(\varphi)$ és el conjunt de totes les variables que ocorren a φ

- $VL(\neg\varphi) := VL(\varphi)$
- $VL((\varphi * \psi)) := VL(\varphi) \cup VL(\psi)$, on $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $VL(Qx\varphi) := VL(\varphi) \setminus \{x\}$, on $Q \in \{\forall, \exists\}$ i $x \in V$

Una ocurrència de x en φ és lliure si 'no queda sota l'efecte de cap quantificador' del tipus Qx (és a dir, la ocurrència no està dins la fórmula que ve a continuació de Qx , i això per cada quantificador del tipus Qx que hi a la fórmula). Altrament direm que la ocurrència és lligada. x serà lliure a φ si té alguna ocurrència lliure. La resta de variables de la fórmula reben el nom de lligades. Una mateixa variable pot tenir ocurrències lliures i ocurrències lligades al mateix temps com es pot veure a l'exemple següent:

Exemple 2.3.8. Si $\varphi := \forall y(\forall x rxy \wedge rxz)$, $VL(\varphi) = \{x, z\}$, encara que x també té una ocurrència lligada.

En general, les fórmules expressen propietats d'elements d'una estructura: els elements representats per les variables lliures. Quan una fórmula no té variables lliures, això canvia radicalment i en aquest cas expressa propietats de l'estructura i rep el nom de sentència.

Definició 2.3.9. φ és *sentència* si $VL(\varphi) = \emptyset$

$SENT_S$ denotarà el conjunt de S -sentències.

L'altre exemple que donem aquí d'aplicació de la recursió són les substitucions. Si $\varphi \in F_S$, $t \in T_S$ i $x \in V$ a continuació definim φ_t^x per recursió sobre φ i serà el resultat de substituir totes les ocurrències lliures de x a φ per t .

2.3.2 substitucions

Definició 2.3.10 (substitucions). • $(rt_1 \dots t_n)_t^x := rt_1^x \dots t_n^x$

- $(t_1 \approx t_2)_t^x := t_1^x \approx t_2^x$
- $(\neg\varphi)_t^x := \neg\varphi_t^x$

- $(\varphi * \psi)_t^x := (\varphi_t^x * \psi_t^x)$, on $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $(Qy\varphi)_t^x := \begin{cases} Qy\varphi_t^x & \text{si } y \neq x \\ Qy\varphi & \text{si } y = x \end{cases}$

Exemple 2.3.11. 1. Si $\varphi := \forall y(\forall x rxy \wedge rxz)$, $\varphi_t^x = \forall y(\forall x rxy \wedge rtz)$ i $\varphi_t^y = \varphi$

2. $\varphi_x^x = \varphi$. Demostreu-ho per inducció.

3. Demostrem per inducció que si $x \notin VL(\varphi)$ llavors $\varphi_t^x := \varphi$. Si φ és atòmica i $x \notin VL(\varphi)$ llavors x no ocorre en φ i per tant $\varphi_t^x = \varphi$. Si $x \notin VL(\neg\varphi) = VL(\varphi)$, per hipòtesi d'inducció $\varphi_t^x = \varphi$ i per tant $(\neg\varphi)_t^x = \neg\varphi_t^x = \neg\varphi$. El cas $(\varphi * \psi)$ amb $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ es fa igual. Per el cas $Qy\varphi$ hem de distingir segons $y = x$ o no. En el primer cas $(Qy\varphi)_t^x = Qy\varphi$. En el segon $(Qy\varphi)_t^x = Qy\varphi_t^x$. De $x \notin VL(Qy\varphi) = VL(\varphi) \setminus \{y\}$ deduïm $x \notin VL(\varphi)$ i per hipòtesi d'inducció $\varphi_t^x = \varphi$. Així $(Qy\varphi)_t^x = Qy\varphi_t^x = Qy\varphi$.

Capítol 3

Semàntica de la lògica de primer ordre

Fins ara només ens hem limitat a construir les fórmules de la lògica de primer ordre sense preocupar-nos del que signifiquen. En aquesta secció ens dedicarem a estudiar el significat de les fórmules, és a dir, la semàntica. Donar el significat d'una fórmula no és més que dir quan aquesta val o no val. Haurem de definir quan un fórmula val en una estructura. Com que generalment les fórmules tenen variables lliures, haurem d'assignar un valor a aquestes variables; de fet la validesa d'una fórmula dependrà de l'estructura i de l'assignació de variables. Primer, però hem d'introduir les estructures, i això dependrà de la signatura. Tindrem un tipus d'estructures per cada signatura.

3.1 Estructures i assignacions

S fixat. Una S -estructura constarà d'un domini (on interpretarem els termes) més la interpretació dels símbols no lògica de S .

Definició 3.1.1. Una S -estructura M consta de:

- Un conjunt **no buit** A (que anomenarem domini)
- Un element $c^M \in A$ per cada $c \in \mathcal{C}$
- Una funció $f^M : A^n \rightarrow A$, per cada $f \in \mathcal{F}$ n -ari
- Una relació n -ària $r^M \subseteq A^n$, per cada $r \in \mathcal{R}$ n -ari

Notació 3.1.2. Si $\mathcal{C} = \{a, b, c, \dots\}$, $\mathcal{F} = \{f, g, h, \dots\}$ i $\mathcal{R} = \{p, q, r, \dots\}$, una S -estructura la denotarem

$$\langle A, a^M, b^M, c^M, \dots, f^M, g^M, h^M, \dots, p^M, q^M, r^M, \dots \rangle.$$

Habitualment usarem M per denotar tant el domini com l'estructura si no hi ha possible confusió.

Exemple 3.1.3. 1. $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{Q}, +, 0 \rangle$ són estructures de la signatura de grups $S_{grups} = \{+, e\}$

2. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ és una estructura de la signatura d'ordres $S_{ordre} = \{\leq\}$

3. $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$ és una estructura de la signatura d'anells ordenats $S_{A.O.} = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$

En els dos últims exemples hem fet un abús de llenguatge al denotar de la mateixa manera els símbols del llenguatge i les seves interpretacions a l'estructura. Aquest abús, però, és força pràctic a l'hora d'evitar notacions excessivament farragoses i el farem tot sovint.

A més de les estructures, necessitem assignar un valor a les variables. Aquest valor ha de ser dins el domini de l'estructura.

Definició 3.1.4. Si M és una estructura, una assignació σ és una funció $\sigma : V \rightarrow M$.

3.2 Validesa d'una fórmula

Un cop fixada M i σ a cada terme t l'hi correspon un element de M que denotarem per $t^M[\sigma]$ i anomenarem interpretació de t en M per σ , definit per recursió de la manera següent:

Definició 3.2.1. • $c^M[\sigma] := c^M$ si $c \in \mathcal{C}$

• $x^M[\sigma] := \sigma(x)$ si $x \in V$

• Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ llavors $t^M[\sigma] := f^M(t_1^M[\sigma], \dots, t_n^M[\sigma])$

Exemple 3.2.2. En aquest exemple la signatura és $S := \{+, e\}$, l'estructura és $M := \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ i l'assignació és $\sigma(x) = 2$ i $\sigma(y) = 3$. Si considerem el terme

$$t := ((x \cdot y) \cdot y) \cdot (e \cdot x)^1$$

llavors $t^M[\sigma] = 10$.

Si ara prenem el terme

$$u := (\dots(((x \cdot x) \cdot x) \cdot x) \dots x)^2$$

llavors $u^M[\sigma] = 2n$.

Òbviament, el valor de $t^M[\sigma]$ només depèn de l'assignació de les variables que apareixen a t : si $\sigma, \mu : V \rightarrow M$ coincideixen sobre les variables de t llavors $t^M[\sigma] = t^M[\mu]$. La demostració d'aquest fet és un exercici d'inducció.

Ara podem definir quan en una estructura M val una fórmula φ per una assignació σ , i que denotarem per $M \models \varphi[\sigma]$:

¹en notació polonesa hauríem d'escriure $\dots xy y \cdot e x$

²en notació polonesa $u = \underbrace{\dots}_{n-1} \underbrace{x \dots x}_n$

Definició 3.2.3. • $M \models rt_1 \dots t_n[\sigma]$ sii $(t_1^M[\sigma], \dots, t_n^M[\sigma]) \in r^M$

- $M \models t_1 \approx t_2[\sigma]$ sii $t_1^M[\sigma] = t_2^M[\sigma]$
- $M \models \neg\varphi[\sigma]$ sii $M \not\models \varphi[\sigma]$ ³
- $M \models (\varphi \wedge \psi)[\sigma]$ sii $M \models \varphi[\sigma]$ i $M \models \psi[\sigma]$
- $M \models (\varphi \vee \psi)[\sigma]$ sii $M \models \varphi[\sigma]$ o $M \models \psi[\sigma]$
- $M \models (\varphi \rightarrow \psi)[\sigma]$ sii $M \models \psi[\sigma]$ o $M \not\models \varphi[\sigma]$
- $M \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\sigma]$ sii o bé $M \models \varphi[\sigma]$ i $M \models \psi[\sigma]$ o bé $M \not\models \varphi[\sigma]$ i $M \not\models \psi[\sigma]$
- $M \models \forall x\varphi[\sigma]$ sii per tot $a \in M$ $M \models \varphi[\sigma_a^x]$, on $\sigma_a^x : V \rightarrow D_m$ ve definida per $\sigma_a^x(y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ i $\sigma_a^x(x) = a$
- $M \models \exists x\varphi[\sigma]$ sii hi ha un $a \in M$ tal que $M \models \varphi[\sigma_a^x]$

La segona clàusula d'aquesta definició diu que \approx s'interpreta com la igualtat. Les cinc següents atribueixen el significat usual a les connectives lògiques; i les dues últimes ho fan pels quantificadors.

Els quantificadors només es refereixen als elements del domini de l'estructura i no podem a priori quantificar, per exemple, sobre subconjunts. Aquesta és una característica essencial de la lògica de *primer ordre*. Hi ha altre lògiques més complertes, però que no tenen tant d'interès. La lògica de segon ordre, per exemple, permet quantificar sobre elements, subconjunts, funcions i relacions. Però no hi ha, per exemple, cap càlcul deductiu que la faci completa.

Exemple 3.2.4. 1. Si $S := \{\cdot\}$, $M = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\varphi = \forall y(y \approx y \cdot x)$ i $\sigma(x) = 0$, llavors $M \models \varphi[\sigma]$. En canvi, si $\sigma(x) = 1$ llavors $M \not\models \varphi[\sigma]$. Si ara $N := (P(\mathbb{N}), \cap)$, llavors $N \models \varphi[\sigma]$ quan $\sigma(x) = \mathbb{N}$ en canvi $N \not\models \varphi[\sigma]$ si $\sigma(x) = \{1, 2, 3\}$.

2. Amb la mateixa M anterior, $\psi = \exists y(x \approx y + y)$ i $\sigma(x) = -8$, llavors $M \models \psi[\sigma]$. En canvi, si $\sigma(x) = 15$ llavors $M \not\models \psi[\sigma]$. Per a N en canvi $N \models \psi[\sigma]$ independentment del valor de $\sigma(x)$. Així $N \models \forall x\psi[\sigma]$ en canvi $M \not\models \forall x\psi[\sigma]$

De fet la validesa d'una fórmula només depèn de l'assignació de les variables lliures de la fórmula:

Proposició 3.2.5 (Lema de coincidència). *M una S-estructura, φ una S-fórmula. Si $\sigma, \mu : V \rightarrow M$ coincideixen sobre $VL(\varphi)$ llavors*

$$M \models \varphi[\sigma] \quad \text{sii} \quad M \models \varphi[\mu]$$

³no es cert $M \models \varphi[\sigma]$

Demostració. Ho farem per inducció sobre φ . Usarem que si σ i μ coincideixen sobre les variables de t llavors $t^M[\sigma] = t^M[\mu]$. Si $\varphi = rt_1 \dots t_n$, $M \models \varphi[\sigma]$ sii $(t_1^M[\sigma], \dots, t_n^M[\sigma]) \in r^M$ sii $(t_1^M[\mu], \dots, t_n^M[\mu]) \in r^M$ sii $M \models \varphi[\mu]$.

El cas $\varphi = t_1 \approx t_2$ es fa igual.

Si $\varphi = \neg\psi$, $M \models \varphi[\sigma]$ sii $M \not\models \psi[\sigma]$ sii (per hipòtesi d'inducció i $VL(\neg\varphi) = VL(\varphi)$) $M \not\models \psi[\mu]$ sii $M \models \varphi[\mu]$.

Si $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $M \models \varphi[\sigma]$ sii $M \models \psi[\sigma]$ i $M \models \theta[\sigma]$ sii (per hipòtesi d'inducció i $VL(\psi \wedge \theta) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$) $M \models \psi[\mu]$ i $M \models \theta[\mu]$ sii $M \models \varphi[\mu]$. Per la resta de connectives binàries es fa igual.

Si $\varphi = \forall x\psi$ i σ, μ coincideixen sobre $VL(\forall x\psi)$, com que $VL(\psi) \subseteq VL(\forall x\psi) \cup \{x\}$ llavors σ_a^x i μ_a^x coincideixen sobre les variables lliures de ψ . Llavors $M \models \varphi[\sigma]$ sii per tot $a \in M$ $M \models \psi[\sigma_a^x]$ sii (H.I.) per tot $a \in M$ $M \models \psi[\mu_a^x]$ sii $M \models \varphi[\mu]$.

El cas $\varphi = \exists x\psi$ és anàleg. □

En particular, la validesa de les sentències només depèn de l'estructura. Això ens permet usar la notació $M \models \varphi$:

Definició 3.2.6. $M \models \varphi$ sii $M \models \varphi[\sigma]$ per alguna $\sigma : V \rightarrow M$ sii $M \models \varphi[\sigma]$ per tota $\sigma : V \rightarrow M$.

El lema de coincidència ens permet, a més, usar la notació, força útil, següent. Quan escrivim $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ volem indicar que $VL(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. En aquest cas, $M \models \varphi[\sigma]$ ho escriurem $M \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)]$. Per exemple, si $\varphi(x) = \forall yx + y \approx y$, $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \models \varphi(x)[0]$ en canvi $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \not\models \varphi(x)[1]$.

3.3 Classes elementals i Δ -elemental

Notació 3.3.1. $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$.

$$\text{Mod}(\Sigma) := \{M \mid M \text{ és una } S\text{-estructura i } M \models \varphi \text{ per tota } \varphi \in \Sigma\}$$

quan $M \in \text{Mod}(\Sigma)$ direm que M és model de Σ .

Exemple 3.3.2. 1. Els grups són els models de Σ_{grups} , on $\Sigma_{\text{grups}} :=$

$$\{\forall x\forall y\forall z(x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z), \forall x(x \cdot e \approx x \wedge e \cdot x \approx x), \forall x\exists y(x \cdot y \approx e \wedge y \cdot x \approx e)\}$$

$$\text{i } S_{\text{grups}} = \{\cdot, e\}.$$

2. Les relacions d'equivalència són els models de Σ_{equiv} , on,

$$\Sigma_{\text{equiv}} := \{\forall xrx, \forall x\forall y(rxy \rightarrow ryx), \forall x\forall y\forall z((rxy \wedge ryz) \rightarrow rxz)\}$$

$$\text{i } S_{\text{equiv}} := \{r\}$$

El lector observarà que a l'exemple anterior hem fet un petit canvi en la notació dels termes, més propera a la que s'usa habitualment en àlgebra. Aquest nou abús de llenguatge serà força habitual quan els símbols funcionals denoten operacions matemàtiques.

Definició 3.3.3. \mathcal{K} una classe de S -estructures.

1. \mathcal{K} és elemental sii existeix $\varphi \in \text{SENT}_S$ tal que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\{\varphi\})$.
2. \mathcal{K} és Δ -elemental sii existeix $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$ tal que $\mathcal{K} = \text{Mod}(\Sigma)$.

Les classes elementals són Δ -elementals però no a l'inrevés. Si Σ és finit, $\text{Mod}(\Sigma)$ és elemental, ja que $\text{Mod}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) = \text{Mod}(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

Exemple 3.3.4. 1. Els grups són una classe elemental.

2. Els grups de cardinal com a molt n són una classe elemental, ja que són $\text{Mod}(\Sigma_{grups} \cup \{\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y (y \approx x_1 \vee \dots \vee y \approx x_n)\})$
3. Els grups infinits són una classe Δ -elemental, ja que són els models de $\Sigma_{grup} \cup \Sigma_{inf}$, on

$$\Sigma_{inf} := \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\neg x_1 \approx x_2 \wedge \neg x_1 \approx x_3 \wedge \dots \wedge \neg x_{n-1} \approx x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

3.4 Definibilitat

S i M fixos.

Notació 3.4.1. Si $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F_S$

$$\varphi(M) = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid M \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n]\}$$

Definició 3.4.2. $R \subseteq M^n$. R és *definible* sii existeix $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F_S$ tal que $R = \varphi(M)$.

Una funció serà definible quan el seu graf ho és.

Exemple 3.4.3. 1. L'ordre dels natural és definible a $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ per la fórmula $\varphi(x, y) = \exists zy \approx x + z$.

2. ser primer és definible a $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ per la fórmula $\exists y \exists z (y \not\approx y + y \wedge z \not\approx z + z \wedge x \approx y + z) \wedge \forall y \forall z (x \approx y \cdot z \rightarrow (y \approx x \vee z \approx x))$. La primera part de la fórmula expressa que x és més gran que 1 i la podríem reemplaçar per $\neg x \cdot x \approx x$.
3. Tot subconjunt finit de \mathbb{N} és definible. $\{0\}$ és definible per la fórmula $\varphi_0(x) := x + x \approx x$, $\{1\}$ és definible per la fórmula $\varphi_1(x) := x \cdot x \approx x \wedge x + x \not\approx x$, $\{n\}$ és definible per la fórmula $\varphi_n := \exists y (y \cdot y \approx y \wedge y + y \not\approx y \wedge x \approx \underbrace{y + \dots + y}_n)$

El lector haurà observat un nou abús de notació: $t_1 \not\approx t_2$ per $\neg t_1 \approx t_2$.

3.5 El teorema de l'homomorfisme

M i N S -estructures fixes.

Definició 3.5.1. Una aplicació $g : M \rightarrow N$ és un *morfisme* (o *homomorfisme*) si satisfà

- $g(c^M) = c^N$ per tot $c \in \mathcal{C}$.
- $g(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(g(a_1), \dots, g(a_n))$ per cada $f \in \mathcal{F}$ n -ari.
- $(a_1, \dots, a_n) \in r^M$ sii $(g(a_1), \dots, g(a_n)) \in r^N$ per cada $r \in \mathcal{R}$ n -ari.

Als morfismes injectius els hi direm *immersions* i als bijectius *isomorfismes*. Un *automorfisme* de M és un isomorfisme de M en M .

Teorema 3.5.2 (de l'homomorfisme). *Si $g : M \rightarrow N$ és un morfisme i $\sigma : V \rightarrow M$ llavors:*

1. per tot $t \in T_S$, $g(t^M[\sigma]) = t^N[g \circ \sigma]$
2. Si g és una immersió i φ és una fórmula lliure de quantificadors

$$M \models \varphi[\sigma] \quad \text{sii} \quad N \models \varphi[g \circ \sigma] \quad (3.5.1)$$

3. Si g és un isomorfisme llavors 3.5.1 val per a qualsevol fórmula $\varphi \in F_S$
4. Si g és exhaustiva llavors 3.5.1 val per a qualsevol fórmula $\varphi \in F_S$ que no contingui el símbol d'igualtat.

Demostració. (1) el deixem com a exercici.

(2). Només cal veure el cas atòmic i aplicació de connectives. Si $\varphi = t_1 \approx t_2$, $M \models \varphi[\sigma]$ sii $t_1^M[\sigma] = t_2^M[\sigma]$ sii (per injectivitat i $g(t_i^M[\sigma]) = t_i^N[g \circ \sigma]$) $t_1^N[g \circ \sigma] = t_2^N[g \circ \sigma]$ sii $N \models \varphi[g \circ \sigma]$. L'altre cas atòmic es fa anàlogament. De les connectives lògiques només fem la negació, doncs es fan totes igual i és la més curta. $M \models \neg\varphi[\sigma]$ sii $M \not\models \varphi[\sigma]$ sii $N \not\models \varphi[g \circ \sigma]$ sii $N \models \neg\varphi[g \circ \sigma]$.

(3) Només queda per fer els quantificadors i ho farem només per l'existencial. Si $M \models \exists x\varphi[\sigma]$ llavors $M \models \varphi[\sigma_a^x]$ per un cert $a \in M$. Per H.I $N \models \varphi[g \circ \sigma_a^x]$ i per tant $N \models \varphi[(g \circ \sigma)_{g(a)}^x]$, d'on $N \models \exists x\varphi[(g \circ \sigma)]$. El recíproc surt per exhaustivitat. (4) és una combinació dels arguments anteriors. \square

Corollari 3.5.3. *Si $h : M \rightarrow N$ és un isomorfisme i $\varphi \in \text{SENT}_S$ llavors*

$$M \models \varphi \quad \text{sii} \quad N \models \varphi$$

Demostració. Prenem $\sigma : V \rightarrow M$ qualsevol. \square

Corollari 3.5.4. *Si g és un automorfisme de M i $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F_S$ llavors $(a_1, \dots, a_n) \in \varphi(M)$ sii $(g(a_1), \dots, g(a_n)) \in \varphi(M)$. És a dir, els conjunts definibles són invariants per automorfisme.*

Demostració. Només cal observar que pel teorema de l'homomorfisme

$$M \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } N \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[g(a_1), \dots, g(a_n)].$$

Exemple 3.5.5. 1. Anem a veure que l'ordre usual de \mathbb{R} no és definible a $\langle \mathbb{R}, + \rangle$. Com que l'aplicació canvi de signe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -x$ és un automorfisme de $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ (un automorfisme de grups) i no preserva l'ordre, pel corollari anterior l'ordre no és definible.

2. La suma no és definible a $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$. Com abans construïrem un automorfisme de $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ que no preservi la suma. Si p_1, p_2, p_3, \dots denota la successió dels nombres primers, definim $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ per $g(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}) = p_2^{n_1} p_1^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$. És fàcil comprovar que és un automorfisme de $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ i en canvi no preserva la suma, doncs $2+5 = 7$ i $g(2)+g(5) = 3+5 \neq 7 = g(7)$. \square

3.6 Conseqüència Lògica

Aquí definirem quan dues fórmules són lògicament equivalents (signifiquen el mateix) i, més en general, el concepte de conseqüència lògica. La idea és que dues fórmules són equivalents si se satisfan en els mateixos casos, és a dir, per les mateixes estructures i assignacions.

Definició 3.6.1. $\Sigma \subseteq F_S$ i $\varphi, \psi \in F_S$.

- $\Sigma \models \varphi$ sii per tota S -estructura M i tota assignació σ en M , si $M \models \theta[\sigma]$ per tota $\theta \in \Sigma$ llavors $M \models \varphi[\sigma]$.
- $\varphi \equiv \psi$ sii per tota M i $\sigma : V \rightarrow M$ se satisfà:

$$M \models \varphi[\sigma] \text{ sii } M \models \psi[\sigma]$$

- φ és vàlida sii per tot M i tot $\sigma : V \rightarrow M$ tenim que $M \models \varphi[\sigma]$
- φ és satisfactible sii per alguna M i algun $\sigma : V \rightarrow M$ tenim que $M \models \varphi[\sigma]$
- $\emptyset \models \varphi$ ho denotarem per $\models \varphi$.

Observació 3.6.2. 1. $\varphi \equiv \psi$ sii $\varphi \models \psi$ i $\psi \models \varphi$.

2. $\varphi \models \psi$ sii $\models \varphi \rightarrow \psi$
3. φ és vàlida sii $\models \varphi$
4. φ és satisfactible sii $\neg \varphi$ no és vàlida.

5. Si $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$ i $\varphi \in \text{SENT}_S$ llavors $\Sigma \models \varphi$ sii $\text{Mod}(\varphi) \subseteq \text{Mod}(\Sigma)$.

Exemple 3.6.3. 1. $\Sigma_{\text{grups}} \models \forall x \forall y \forall z (x \cdot z \approx y \cdot z \rightarrow x \approx y)$: això no és més que dir que la llei de cancel·lació val en tots els grups.

2. $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$. Si $M \models \exists x(\varphi \vee \psi)[\sigma]$ llavors hi ha $a \in M$ tal que $M \models (\varphi \vee \psi)[\sigma_a^x]$ i per tant $M \models \varphi[\sigma_a^x]$ o $M \models \psi[\sigma_a^x]$. Llavors $M \models \exists x\varphi[\sigma]$ o $\exists xM \models \psi[\sigma]$, d'on $M \models \exists x\varphi \vee \exists x\psi$. El recíproc és anàleg.

Corollari 3.6.4. 1. Si $\Sigma \models \varphi$ i x no es lliure en cap de les fórmules de Σ llavors $\Sigma \models \forall x\varphi$.

2. Si x no és lliure a φ llavors

$$\models \varphi \rightarrow \forall x\varphi$$

Demostració. 1. Suposem que $M \models \psi[\sigma]$ per tota $\psi \in \Sigma$; hem de veure que $M \models \varphi[\sigma_a^x]$ per tot $a \in M$. Com x no és lliure a cap de les fórmules de Σ pel lema de coincidència deduïm que $M \models \psi[\sigma_a^x]$ per tota $\psi \in \Sigma$. De $\Sigma \models \varphi$ concloem que $M \models \varphi[\sigma_a^x]$.

2. ja que, per l'apartat anterior $\varphi \models \forall x\varphi$. □

3.7 El Lema de substitució

Quan fem una substitució, voldrem que φ_t^x 'digui' de t el mateix que φ 'diu' de x . Això no és cert en general i el problema està en que al fer la substitució les variables de t poden quedar sota l'efecte d'un quantificador, com es veu a l'exemple següent.

Exemple 3.7.1. Si $\varphi(x) = \exists y\neg x \approx y$, llavors $\varphi_y^x = \exists y\neg y \approx y$.

Quan això no passa direm que x és substituïble per t a φ (o que la substitució és lliure) i ho definim a continuació per recursió. x i t són fixos.

Definició 3.7.2 (substituïble). • Si φ és atòmica, la substitució és lliure

- La substitució a $\neg\varphi$ és lliure sii ho és la substitució a φ
- La substitució a $(\varphi * \psi)$ és lliure sii ho són les substitució a φ i ψ
- La substitució a $\forall y\varphi$ és lliure si

$$\begin{cases} y = x \\ y \neq x, \text{ la substitució a } \varphi \text{ és lliure i } y \text{ no ocorre a } t. \end{cases}$$

- La substitució a $\exists y\varphi$ és lliure si

$$\begin{cases} y = x \\ y \neq x, \text{ la substitució a } \varphi \text{ és lliure i } y \text{ no ocorre a } t. \end{cases}$$

Per exemple x sempre és substituïble per x . Les substitucions per una constant també són sempre lliures.

El lema de substitució ens assegura que quan la substitució és lliure no hi ha problemes.

Proposició 3.7.3 (Lema de substitució). *Si x és substituïble per t a φ llavors*

$$M \models \varphi_t^x[\sigma] \text{ sii } M \models \varphi[\sigma_{tM}^x]$$

Demostració. Primer cal veure que $(t_u^x)^M[\sigma] = t^M[\sigma_{uM}^x]$ i ho deixem com a exercici per el lector.

Ara anem a provar l'enunciat per inducció sobre φ . Els casos en que φ és atòmica o bé s'obté per aplicació de connectives es fan de la manera habitual. Pel que fa als quantificadors ens limitarem al cas universal, doncs són idèntics. Suposem que x és substituïble per t a φ i hem de veure

$$M \models (\forall y\varphi)_t^x[\sigma] \text{ sii } M \models \forall y\varphi[\sigma_{tM}^x] \quad (3.7.1)$$

Distingim segons $y = x$ o no. En el primer cas tenim $(\forall y\varphi)_t^x = \forall y\varphi$ i 3.7.1 surt aplicant el lema de coincidència.

En el cas en que $y \neq x$ tenim $(\forall y\varphi)_t^x = \forall y\varphi_t^x$ i per hipòtesi x és substituïble per t a φ i a més y no ocorre a t . Llavors $M \models \forall y\varphi_t^x[\sigma]$ sii per tot $a \in M$ $M \models \varphi_t^x[\sigma_a^y]$ sii (per H.I. i x és substituïble per t a φ) per tot $a \in M$ $M \models \varphi[(\sigma_a^y)_t^M[\sigma_a^y]]$ sii (y no ocorre a t i per tant $t^M[\sigma] = t^M[\sigma_a^y]$) per tot $a \in M$ $M \models \varphi[(\sigma_{tM}^x)_a^y]$ sii $M \models \forall y\varphi[\sigma_{tM}^x]$. \square

Corollari 3.7.4. *Si x és substituïble per t a φ llavors*

1. $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_t^x$
2. $\models \varphi_t^x \rightarrow \exists x\varphi$

Demostració. (1). Si $M \models \forall x\varphi[\sigma]$ llavors $M \models \varphi[\sigma_{tM}^x]$ i pel lema de substitució $M \models \varphi_t^x[\sigma]$. (2) es fa igual. \square

La hipòtesi que x és substituïble per t a φ és necessària, doncs $\not\models \forall x\exists y(x \neq y) \rightarrow \exists y(y \neq y)$.

Capítol 4

Deducció natural

En aquest capítol assumirem que la connectiva \leftrightarrow no forma part del vocabulari. És a dir, les connectives lògiques a partir de les quals construïm les fórmules són $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ a més dels quantificadors universal i existencial. Això no suposa cap limitació, doncs podem expressar $\varphi \leftrightarrow \psi$ com $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

En Deducció natural, les deduccions són arbres amb arrel de fórmules (hi ha una fórmula a cada node de l'arbre). Les hipòtesis de la deducció són les fulles, llevat de si les hem cancel·lat. L'arrel és la fórmula deduïda. Els arbres es construeixen recursivament aplicant una sèrie de regles a partir de l'arbre trivial (el que té un sol node). Hi ha una regla de introducció i una d'eliminació per a cada connectiu lògic, incloent els quantificadors, més dues regles específiques per a la igualtat. En començar, totes les fulles són hipòtesis, però certes regles ens permeten eliminar algunes hipòtesis. Això ho indiquem posant $[\varphi]$: la hipòtesi φ es pot cancel·lar en totes (o algunes de) les fulles on apareix.

4.1 Les regles de la deducció natural

Les regles de construcció són les següents:

- Introducció de la conjunció ($I\wedge$):
$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

Aquesta regla s'ha d'entendre de la manera següent. Si \mathcal{D}_1 és una deducció que acaba a φ (φ és l'arrel de \mathcal{D}_1) i \mathcal{D}_2 és una deducció que acaba a ψ , l'arbre que té per arrel $\varphi \wedge \psi$ i aquesta fórmula té φ i ψ com a filles i a continuació \mathcal{D}_1 per sobre de φ i \mathcal{D}_2 per sobre de ψ també és una deducció.

- Eliminació de la conjunció ($E\wedge$):
$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Aquestes regles s'interpreten així: Si \mathcal{D} és una deducció amb arrel $\varphi \wedge \psi$, l'arbre que s'obté de l'anterior afegint φ (o ψ , segons el cas) com a pare de $\varphi \wedge \psi$ també és una deducció.

$$\bullet \text{ Introducció de la implicació } (I \rightarrow): \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Aquesta regla té una construcció semblant a l'anterior. Ara, però, a més d'afegir la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$ sota l'arrel, podem eliminar tantes aparicions de la hipòtesi φ com vulguem. A la pràctica és convenient eliminar-les totes, doncs una deducció amb menys hipòtesi és més 'forta'.

$$\bullet \text{ Eliminació de la implicació } (E \rightarrow): \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Aquesta és anàloga a $(E \wedge)$. Les dues següents són anàlogues a $(E \wedge)$:

$$\bullet \text{ Introducció de la disjunció } (I \vee): \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\bullet \text{ Eliminació de la disjunció } (E \vee): \frac{\begin{array}{ccc} [\varphi] & [\psi] & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma \end{array}}{\sigma}$$

L'eliminació de la disjunció (o prova per casos) diu el següent. Si \mathcal{D}_1 és una deducció amb arrel $\varphi \vee \psi$, \mathcal{D}_2 i \mathcal{D}_3 són deduccions amb arrel σ , llavors l'arbre construït posant σ com a arrel comuna de \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 i \mathcal{D}_3 (fent que σ sigui pare de les seves arrels respectives) i eliminant la hipòtesi φ a \mathcal{D}_2 i ψ a \mathcal{D}_3 és una nova deducció. Igual que a $(I \rightarrow)$, podem eliminar tantes instàncies de les hipòtesis com vulguem, preferiblement totes.

$$\bullet \text{ Introducció de la negació } (I \neg): \frac{\begin{array}{cc} [\varphi] & [\varphi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi \end{array}}{\neg\varphi}$$

La regla $(I \neg)$ (o prova per reducció a l'absurd) permet, a partir d'una deducció de ψ i una de $\neg\psi$ construïm una deducció de $\neg\varphi$ posant aquesta última fórmula com a pare comú de les arrels de les deduccions anteriors. També podem (i en general convé) eliminar tantes instàncies de la hipòtesi φ com vulguem en ambdues deduccions. La regla següent és anàloga a $(E \wedge)$:

$$\bullet \text{ Eliminació de la negació } (E \neg): \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

$$\bullet \text{ Introducció del quantificador universal } (I \forall): \frac{\varphi_y^x}{\forall x \varphi}, \quad \varphi_y^x \text{ lliure i } y \notin VL(\text{Hip}, \forall x \varphi).$$

$(I \forall)$ s'interpreta així: si \mathcal{D} és una deducció amb arrel φ_y^x , la substitució φ_y^x i y és una variable que no és lliure en cap de les hipòtesis no cancel·lades de \mathcal{D}

ni a $\forall x\varphi$ (si $y = x$ no hi ha condició i si $y \neq x$ y ha de ser lliure a φ) llavors afegint $\forall x\varphi$ a \mathcal{D} com a pare de φ obtenim una nova deducció.

- Eliminació del quantificador universal ($E\forall$): $\frac{\forall x\varphi}{\varphi_t^x}$, φ_t^x lliure.

Aquesta regla, igual que la següent permet afegir una fórmula per sota de l'arrel d'una deducció. Només es poden aplicar si la substitució de x per t a φ és lliure.

- Introducció del quantificador existencial ($I\exists$): $\frac{\varphi_t^x}{\exists x\varphi}$, φ_t^x lliure.

- Eliminació del existencial ($E\exists$):
$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_y^x] \\ \vdots \\ \exists x\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi} \quad \varphi_y^x \text{ lliure i } y \notin$$

$VL(\text{Hip}, \exists x\varphi, \psi)$.

Si \mathcal{D}_1 és una deducció de $\exists x\varphi$ i \mathcal{D}_2 és una deducció de ψ llavors l'arbre obtingut a partir de \mathcal{D}_1 i \mathcal{D}_2 posant ψ com a pare comú de les arrels de \mathcal{D}_1 i \mathcal{D}_2 és una nova deducció. Aquesta regla només és vàlida si la substitució φ_y^x és lliure i y no és lliure ni a ψ ni a $\forall x\varphi$ ni a cap de les hipòtesis obertes de \mathcal{D}_1 ni \mathcal{D}_2 excepte φ_y^x (x pot ser lliure a φ) i permet eliminar totes les instàncies que volem de la hipòtesi φ_y^x a \mathcal{D}_2 .

Finalment donem un parell de regles per a la igualtat.

- Reflexivitat de la igualtat ($Ref \approx$): $\frac{}{t \approx t}$

Aquesta regla permet usar $t \approx t$ sense necessitat de considerar-lo com una hipòtesi. Formalment és un arbre amb dos nodes: una fulla 'cancel·lada' i $t \approx t$ com a arrel.

- Substitució per a la igualtat ($Sub \approx$): $\frac{t \approx u \quad \varphi_t^x}{\varphi_u^x}$, φ_t^x i φ_u^x lliures.

Les úniques regles que permeten cancel·lar hipòtesis són: ($I \rightarrow$), ($E\forall$) ($I \neg$) i ($E\exists$).

4.2 Deduccions

Formalment les deduccions seran certs arbres amb arrel de fórmules (els nodes són fórmules) on, a més, les fulles estan etiquetades amb un 0 o un 1. Les fulles etiquetades amb 1 són les hipòtesis de la deducció (les etiquetades amb un 0 són les hipòtesis 'cancel·lades'). A l'hora d'aplicar les regles, 'cancel·lar' hipòtesis consisteix en canviar l'etiqueta 1 per 0 (encara que a la pràctica ens limitarem a tatxar-les). Un arbre trivial és el que consta d'una sola fórmula que és al mateix temps fulla (etiquetada amb un 1) i arrel.

Definició 4.2.1. El conjunt de les deduccions és el mínim conjunt d'arbres de fórmules amb fulles etiquetades que conté els arbres trivials, els arbres de la forma ($Ref \approx$) i que és tancat per aplicació de les regles anteriors.

Exemple 4.2.2. 1. veiem com podem deduir $\sigma \wedge \psi$ a partir de $\{\varphi \wedge \psi, \varphi \rightarrow \sigma\}$:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \varphi \rightarrow \sigma}{\sigma} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}}{\sigma \wedge \psi}$$

En aquesta deducció no hem cancel·lat hipòtesis. Les hipòtesis són totes les que apareixen a les fulles: $\varphi \wedge \psi$ i $\varphi \rightarrow \sigma$.

2. Veiem ara una deducció de $\mu \rightarrow \sigma$ a partir de $\{\mu \rightarrow (\varphi \vee \psi), \varphi \rightarrow \sigma, \psi \rightarrow \sigma\}$:

$$\frac{\frac{\mu^2 \quad \mu \rightarrow (\varphi \vee \psi)}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\varphi^1 \quad \varphi \rightarrow \sigma}{\sigma} \quad \frac{\psi^1 \quad \psi \rightarrow \sigma}{\sigma}}{\frac{\sigma}{\mu \rightarrow \sigma}}$$

En aquesta deducció hem cancel·lat primer φ i ψ al aplicar (EV) i després μ al aplicar ($I \rightarrow$).

3. Veiem ara una deducció de $\forall x\psi$ a partir de $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \forall x\varphi$:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \forall x\varphi}{\forall x\varphi}}{\varphi} \quad \frac{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \forall x\varphi}{\forall x(\varphi \rightarrow \psi)}}{\frac{\psi}{\forall x\psi}}$$

Al eliminar \forall usem que la substitució φ_x^x és lliure.

La definició de deducció que hem donat és anàloga a la definició dels termes i de les fórmules. També hi haurà un principi de recursió i un principi d'inducció, però només farem servir aquest últim. Per demostrar que totes les deduccions tenen una certa propietat P n'hi haurà prou amb veure que les deduccions trivials (arbres trivials) la tenen i que al aplicar les regles la propietat es preserva.

4.3 El teorema d'adequació

Definició 4.3.1. Si Σ és un conjunt de fórmules i φ és una fórmula, diem que φ es dedueix de Σ si hi ha una deducció de φ que té totes les hipòtesis a Σ . Això ho denotarem per $\Sigma \vdash \varphi$.

Proposició 4.3.2 (teorema d'adequació). *Si $\Sigma \vdash \varphi$ llavors $\Sigma \models \varphi$.*

Demostració. Demostrarem, per inducció sobre \mathcal{D} , que si \mathcal{D} és una deducció de φ a partir de Σ , llavors $\Sigma \models \varphi$. El cas de la deducció trivial és obvi (per no dir trivial) i el cas de (*Ref* \approx) és conseqüència de que $t \approx t$ és una fórmula vàlida. També cal veure que cada una de les regles preserva el que volem demostrar, i això cal fer-ho una per una. Veurem que en cada cas es redueix a provar una propietat més o menys elemental de \models .

Comencem per (*I* \wedge). Si \mathcal{D} l'hem construït aplicant (*I* \wedge), llavors les deduccions de φ i ψ també tenen les hipòtesis dins Σ . Per H.I $\Sigma \models \varphi$ i $\Sigma \models \psi$ i per tant $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$. El cas de (*E* \wedge) surt de $\varphi \wedge \psi \models \varphi$. Per a (*I* \rightarrow) la inducció ho redueix a comprovar que si $\Sigma, \varphi \models \psi$ llavors $\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi$. Per (*E* \rightarrow) surt de que $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$. I així successivament. A continuació indiquem la propietat semàntica que cal verificar en cada cas. Com que la majoria són trivials (llevat de les dels quantificadors) les deixem com a exercici.

Per a (*I* \vee) cal veure que $\varphi \models \varphi \vee \psi$. Per a (*E* \vee) cal veure que si $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, $\Sigma, \varphi \models \sigma$ i $\Sigma, \psi \models \sigma$ llavors $\Sigma \models \sigma$. Per a (*I* \neg) cal veure que si $\Sigma, \varphi \models \psi$ i $\Sigma, \varphi \models \neg\psi$ llavors $\Sigma \models \neg\varphi$. Per a (*E* \neg) cal veure que $\neg\neg\varphi \models \varphi$.

Per a (*I* \forall) cal veure que si $\Sigma \models \varphi_y^x$, φ_y^x és lliure i y no és lliure a cap fórmula de Σ ni a $\forall x\varphi$ llavors $\Sigma \models \forall x\varphi$. Això està fet a 3.6.4 en el cas $y = x$. En els casos de (*E* \forall) i (*I* \exists) cal verificar que $\forall x\varphi \models \varphi_t^x$ i $\varphi_t^x \models \exists x\varphi$ si la substitució és lliure. Això està fet a 3.7.4. Per a (*E* \exists), necessitem veure que si φ_y^x és lliure i y no és lliure ni a Σ ni a ψ ni a $\exists x\varphi$ llavors $\Sigma, \varphi_y^x \models \psi$ i $\Sigma \models \exists x\varphi$ implica $\Sigma \models \varphi$. Finalment, per (*Sub* \approx) cal veure que $\{t \approx u, \varphi_t^x\} \models \varphi_u^x$ si ambdues substitucions són lliures. □

4.4 Algunes propietats de \vdash

- Observació 4.4.1.*
1. Si $\varphi \in \Sigma$ llavors $\Sigma \vdash \varphi$, doncs φ ja és una deducció.
 2. Si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ i $\Sigma_1 \vdash \varphi$ llavors $\Sigma_2 \vdash \varphi$, ja que la mateixa deducció serveix.
 3. $\Sigma \vdash \varphi$ sii hi ha $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finit tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi$, doncs en una deducció només apareixen un nombre finit de fórmules de Σ .

Definició 4.4.2. Un conjunt de fórmules Σ és inconsistent si hi ha una fórmula φ tal que $\Sigma \vdash \varphi, \neg\varphi$. Això últim és una manera abreujada de dir que $\Sigma \vdash \varphi$ i $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Altrament direm que Σ és consistent.

Proposició 4.4.3. 1. (*generalització*) Si x no és lliure a cap fórmula de Σ i $\Sigma \vdash \varphi$ llavors $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.

2. (deducció) $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ sii $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
3. (contraposició) $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ sii $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\varphi$.
4. (reducció a l'absurd) Σ, φ és inconsistent sii $\Sigma \vdash \neg\varphi$
5. Si Σ és inconsistent llavors $\Sigma \vdash \varphi$ per a qualsevol fórmula φ .

Demostració. (1) surt aplicant $(I\forall)$ i (2) aplicant $(I\rightarrow)$ i $(E\rightarrow)$. La implicació

de l'esquerra cap a la dreta de (3) és per $(I\neg)$: si $\frac{\varphi}{\vdots}$ és una demostració de ψ

que té les hipòtesis a Σ, φ llavors φ

$$\frac{\frac{\vdots}{\psi} \quad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

és una deducció de $\neg\varphi$ amb hipòtesis a $\Sigma, \neg\psi$. El recíproc es fa usant introducció i eliminació de la negació:

$$\frac{\varphi \quad \frac{\frac{\neg\psi}{\vdots}}{\neg\varphi}}{\neg\neg\psi}}{\psi}$$

és la deducció buscada (cancel·lant totes les hipòtesis $\neg\psi$), on $\frac{\neg\psi}{\vdots}$ és una deducció de $\neg\varphi$ a partir de Σ i $\neg\psi$.

D'esquerra a dreta de (4) és per $(E\neg)$ i el recíproc és trivial. Finalment (5) el deixem com a exercici. \square

Exercici 4.4.4. Contraposició i Reducció a l'absurd admeten una altra forma canviant la posició del \neg . Enuncieu-les i proveu-les.

De fet, cada una d'aquestes propietats de l'operador \vdash la podem veure com una o dues regles. En el primer cas és exactament la regla $(I\forall)$. A (2) la implicació d'esquerra a dreta és la regla $(I\rightarrow)$ i l'altre implicació és la regla $(E\rightarrow)$. La resta les podem veure com a regles 'deduïdes'. Per exemple, la implicació de dreta a esquerra de (3) és

$$\frac{[\neg\psi] \quad \frac{\vdots \quad \vdots}{\neg\varphi \quad \varphi}}{\psi}$$

mentre que l'altre implicació no és més que un cas particular de $(I\neg)$.

4.4.1 el tall

Proposició 4.4.5 (tall). *Si $\Sigma \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ i $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ llavors $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demostració. Es fa aplicant $(I \rightarrow)$ n cops i a continuació $(E \rightarrow)$ n cops. Per exemple, si $n = 2$, la següent és una deducció de φ a partir de Σ :

$$\frac{\frac{\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\vdots} \quad \varphi}{\varphi_1 \rightarrow \varphi} \quad \vdots}{\frac{\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi) \quad \varphi_2}{\varphi_1 \rightarrow \varphi} \quad \varphi_1} \varphi \quad \text{on} \quad \frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\vdots} \quad \varphi, \quad \frac{\vdots}{\varphi_1} \quad \text{i} \quad \frac{\vdots}{\varphi_1} \quad \text{deno-}$$

ten deduccions de φ a partir de $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, de φ_1 a partir de Σ i de φ_2 a partir de Σ respectivament. \square

4.4.2 generalització de les constants

Notació 4.4.6. Si $\bar{c} = c_1, \dots, c_n$ són constants i $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ són variables, $\varphi_{\bar{x}}^{\bar{c}}$ denota la fórmula obtinguda substituint a φ cada ocurrència de c_i per x_i , $i = 1 \dots n$. Si \mathcal{D} és una deducció $\mathcal{D}_{\bar{x}}^{\bar{c}}$ denota l'arbre obtingut a partir de \mathcal{D} fent la substitució corresponent a cada node.

Lema 4.4.7. *Si \mathcal{D} és una deducció i cap de les variables $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$ apareixen a \mathcal{D} , llavors $\mathcal{D}_{\bar{x}}^{\bar{c}}$ també és una deducció.*

Demostració. Per inducció sobre \mathcal{D} . Per la deducció trivial és obvi. Si a l'últim pas hem construït \mathcal{D} aplicant, per exemple, $(I \wedge)$ a

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

llavors $\mathcal{D}_{\bar{x}}^{\bar{c}}$ s'obté aplicant la regla

$$\frac{\varphi_{\bar{x}}^{\bar{c}} \quad \psi_{\bar{x}}^{\bar{c}}}{\varphi_{\bar{x}}^{\bar{c}} \wedge \psi_{\bar{x}}^{\bar{c}}},$$

que també és vàlida. I això passarà amb totes les regles: obtenim una instància diferent de la mateixa regla. L'únic punt delicat són les quatre regles corresponents als quantificadors. Deixem com a exercici comprovar que cap de les condicions corresponents no s'espantia. La raó és la tria de les variables \bar{x} . \square

Una signatura S' es diu que és una expansió simple de S si s'ha obtingut a partir de l'anterior afegint constants, és a dir, si S' conté S i $S' - S$ només conté constants. A priori a S' hi ha més deduccions que a S , inclús amb hipòtesis i conclusions de S . El corollari següent diu que en aquest cas encara que hi hagi més deduccions, es dedueixen les mateixes coses. \vdash_S indica que la deducció és a S .

Corollari 4.4.8. *Si S' és una expansió simple de S , Σ és un conjunt de S -fórmules i φ una S -fórmula, llavors*

1. $\Sigma \vdash_S \varphi$ sii $\Sigma \vdash_{S'} \varphi$
2. Σ és S -consistent sii Σ és S' -consistent.

Demostració. (1) Com que tota S -deducció és una S' -deducció, només cal veure la implicació de dreta a esquerra, i això surt del lema 4.4.7 observant que si $\varphi \in F_S$ llavors $\varphi_{\bar{y}} = \varphi$. (2) és clar a partir de (1). \square

Quan fem la demostració del teorema de completesa estarem treballant amb conjunts consistents de fórmules d'un cert llenguatge. Aquest corollari ens permet considerar-los consistents en qualsevol expansió simple i ens permetrà relaxar la notació.

En el següent teorema ens referim a una signatura donada S .

Corollari 4.4.9 (Teorema de generalització de les constants). *Si $\Sigma \vdash \varphi_c^x$ i c no ocorre a cap fórmula de Σ ni a φ llavors $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.*

Demostració. Sigui \mathcal{D} una deducció de φ_c^x a partir de Σ i y una variable que no apareix a \mathcal{D} . Pel Lema 4.4.7 \mathcal{D}_y^c és una deducció de $\varphi_c^x = \varphi_y^x$ a partir de Σ . Com que y no apareix a \mathcal{D} , aplicant (I \forall) obtenim la següent deducció de $\forall x\varphi$ a partir de Σ :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi_y^x \end{array}}{\forall x\varphi}$$

\square

El resultat anterior el podem pensar com una regla deduïda. En certes presentacions de la Deducció Natural es posa com una regla del càlcul. Posat en forma de regla, seria el següent:

$$\frac{\varphi_c^x}{\forall x\varphi}, \quad \text{si } c \text{ no ocorre a cap de les hipòtesis obertes ni a } \varphi.$$

També es pot presentar la regla (E \exists) usant constants de manera anàloga. Deixem com exercici la seva formulació.

4.5 Regles deduïdes

Veiem aquí algunes regles que es poden derivar a partir de les bàsiques. Algunes les usarem més endavant.

Lema 4.5.1. 1. $\frac{t_1 \approx t_2}{t_2 \approx t_1}$.

$$2. \frac{t_1 \approx t_2 \quad t_2 \approx t_3}{t_1 \approx t_3}$$

$$3. \frac{t_1 \approx u_1 \quad \cdots \quad t_n \approx u_n \quad rt_1 \cdots t_n}{ru_1 \cdots u_n}$$

$$4. \frac{t_1 \approx u_1 \quad \cdots \quad t_n \approx u_n}{ft_1 \cdots t_n \approx fu_1 \cdots u_n}$$

$$5. \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\psi}$$

$$6. \frac{\neg\varphi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi}$$

$$7. \frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi} \quad \frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\neg\psi}$$

$$8. \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi} \quad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\psi}$$

$$9. \frac{[\neg\varphi] \quad \vdots \quad \psi}{\varphi \vee \psi}$$

Demostració. Només farem les quatre primeres i la última, les demés les deixem com a exercici. A més, al provar una regla deduïda ens permetrem usar regles deduïdes anteriorment. A les quatre deduccions que segueixen, x és una variable que no apareix a cap altre terme. Això fa que, per exemple, $(x \approx t_1)_{t_1}^x = t_1 \approx t_1$ i $(x \approx t_1)_{t_2}^x = t_2 \approx t_1$. Les úniques regles que apliquem en aquestes quatre primeres són les de la igualtat.

$$1. \frac{t_1 \approx t_2 \quad \overline{(x \approx t_1)_{t_1}^x}}{(x \approx t_1)_{t_2}^x}$$

$$2. \frac{\frac{t_1 \approx t_2}{t_2 \approx t_1} \quad (x \approx t_3)_{t_2}^x}{(x \approx t_3)_{t_1}^x}$$

$$3. \text{ Ho fem en el cas } n = 2: \frac{t_2 \approx u_2 \quad \frac{t_1 \approx u_1 \quad (rxt_2)_{t_1}^x}{(ru_1x)_{t_2}^x = (rxt_2)_{u_1}^x}}{(ru_1x)_{u_2}^x}$$

4. Ho fem també per $n = 2$:

$$\frac{t_2 \approx u_2 \quad \frac{t_1 \approx u_1 \quad \overline{(ft_1t_2 \approx fxt_2)_{t_1}^x}}{(ft_1t_2 \approx fu_1x)_{t_2}^x} = (ft_1t_2 \approx fxt_2)_{u_1}^x}{(ft_1t_2 \approx fu_1x)_{u_2}^x}}$$

Finalment, fem (9) usant lliurement les anteriors:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg(\varphi \not\sim \psi)}{\neg\psi}}{\neg\psi} \quad \frac{\frac{\neg(\varphi \not\sim \psi)}{\neg\varphi}}{\psi} \quad \frac{\frac{\neg\phi}{\vdots} \quad \psi}{\neg\varphi \rightarrow \psi}}{\neg\neg(\varphi \vee \psi)}}{\varphi \vee \psi}}{\neg\varphi \quad \vdots \quad \psi} \text{ denota una deducció de } \psi \text{ usant } \neg\varphi \text{ com a hipòtesi.} \quad \square$$

Exercici 4.5.2. Demostreu que per cada terme t hi ha una variable x tal que

$$\vdash \exists xt \approx .x$$

Capítol 5

Un càlcul deductiu tipus Hilbert

Introduïrem aquí un càlcul deductiu, amb el que intentarem formalitzar què és una ‘demostració’. Hi haurà una sèrie d’axiomes lògics (els quals haurem de veure que són fórmules vàlides) i una sola regla: el Modus Ponens. Aquesta diu que de φ i $\varphi \rightarrow \psi$ ‘s’en segueix ψ ’. Quan a partir de Σ podem ‘demostrar’ φ ho escriurem $\Sigma \vdash \varphi$ i direm que φ *es dedueix* de Σ . L’objectiu serà veure que aquest càlcul és complet, és a dir deduïm tot el que és conseqüència lògica i no més. En símbols: $\Sigma \vdash \varphi$ sii $\Sigma \models \varphi$.

5.1 Axiomes lògics

Un generalització d’una fórmula φ és una altre fórmula que s’ha obtingut afegint quantificadors universals al davant: $\forall x \forall y \dots \varphi$. Els axiomes lògics són totes les fórmules següents així com les seves generalitzacions:

- Les tautologies
- $\forall x \varphi \rightarrow \varphi_x^t$, on x és substituïble per t a φ . (Axioma de substitució)
- $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$, on x no és lliure a φ . (axioma de generalització)
- $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$
- $\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$
- $t \approx t$
- $t_1 \approx t_2 \rightarrow t_2 \approx t_1$
- $(t_1 \approx t_2 \wedge t_2 \approx t_3) \rightarrow t_1 \approx t_3$
- $(t_1 \approx u_1 \wedge \dots \wedge t_n \approx u_n) \rightarrow f t_1 \dots t_n \approx f u_1 \dots u_n$

- $(t_1 \approx u_1 \wedge \dots \wedge t_n \approx u_n \wedge r t_1 \dots t_n) \rightarrow r u_1 \dots u_n$

Se sobreentén que φ i ψ són fórmules qualssevol, que f és un símbol funcional n -ari, r és un símbol de relació n -ari i que les t 's i les u 's que apareixen en els cinc últims grups d'axiomes lògics són termes. També sobreentendem que la signatura és fixada, per no tenir que parlar d' S -axiomes. Farem servir \mathcal{A} per denotar els axiomes lògics. Observem que hi ha infinits axiomes en cada grup.

5.2 deduccions

S també està fixat i anem a introduir les deduccions (hauríem de parlar d' S -deduccions). Σ denotarà un conjunt de fórmules i φ una fórmula.

Definició 5.2.1. Una *deducció* a partir de Σ és una seqüència finita de fórmules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ on per cada $i = 1, \dots, n$:

- o bé φ_i és un axioma lògic,
- o bé $\varphi_i \in \Sigma$,
- o bé hi ha $j < i$ i $k < i$ tals que $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$ (φ_i s'obté per Modus Ponens de φ_j i φ_k).

Si φ és la última fórmula d'una deducció a partir de Σ direm que *hi ha una deducció de φ a partir de Σ* o també que *φ es dedueix de Σ* i ho escriurem $\Sigma \vdash \varphi$. També farem servir $\Sigma \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ per indicar que cada una de les fórmules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es dedueix de Σ . $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ ho farem servir per denotar $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$. També $\vdash \varphi$ denotarà $\emptyset \vdash \varphi$.

Exemple 5.2.2. Veiem que $\vdash \varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$ si x és substituïble per t a φ . Una deducció seria:

1. $\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x$ Ax. Lògic
2. $(\forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi_t^x) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi)$ taut. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$
3. $\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ M.P 1,2
4. $\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$ Ax. Lògic
5. $(\varphi_t^x \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi) \rightarrow ((\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi))$ taut. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
6. $(\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi) \rightarrow (\varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi)$ M.P. 3,5
7. $\varphi_t^x \rightarrow \exists x \varphi$ M.P. 4,6

A continuació de cada fórmula de la deducció indiquem si és axioma lògic (i si és tautologia indiquem quina) o bé si s'obté per modus Ponens de dues fórmules anterior indicant quines.

5.3 El teorema d'adequació

Proposició 5.3.1 (adequació).

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ implica } \Sigma \models \varphi$$

Demostració. Una demostració per inducció sobre la longitud de la deducció ho redueix a provar que $\Sigma \models \varphi$ ens els casos en que $\varphi \in \Sigma \cup \mathcal{A}$ o φ s'obté per modus Ponens de dues fórmules anteriors. El cas $\varphi \in \Sigma$ és evident i el cas en que φ s'obté per M.P. de $\psi \rightarrow \varphi$ i ψ , per hipòtesi d'inducció tenim que $\Sigma \models \psi$ i $\Sigma \models \psi \rightarrow \varphi$ d'on s'en segueix $\Sigma \models \varphi$. Pel que fa al axiomes lògics, tots són fórmules vàlides. Això s'ha de fer per tots els grups. L'axioma de generalització està fet a 3.6.4, l'axioma de substitució està fet a 3.7.4, les tautologies les deixem com a exercici. La resta d'axiomes són immediats i també els deixem com a exercici. \square

5.4 Algunes propietats de \vdash

Observació 5.4.1. 1. Si $\varphi \in \Sigma \cup \mathcal{A}$ llavors $\Sigma \vdash \varphi$, doncs en aquest cas φ ja és una deducció a partir de Σ

2. Si $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ i $\Sigma_1 \vdash \varphi$ llavors $\Sigma_2 \vdash \varphi$, doncs la mateixa deducció serveix.
3. $\Sigma \vdash \varphi$ sii hi ha $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finit tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi$, doncs en una deducció només apareixen un nombre finit de fórmules de Σ .
4. Tot segment inicial d'una deducció és una deducció.
5. Si $\Sigma \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ i $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ llavors $\Sigma \vdash \varphi$. Només cal substituir a la deducció de φ a partir de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ cada ocurrència de cada φ_i per la seva deducció a partir de Σ . També es pot fer posant primer les deduccions de les fórmules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (en qualsevol ordre) i a continuació la deducció de φ .

La propietat (5) la farem servir constantment i ens permetrà usar en una deducció fórmules prèviament deduïdes com si es tractessin d'axiomes lògics o fórmules de l'antecedent. En particular si sabem que $\vdash \varphi$ podem fer servir φ com si es tractés d'un axioma lògic.

Exemple 5.4.2. Veiem que si x no ocorre a t llavors $\vdash \exists x t \approx x$:

1. $t \approx t$ Ax. Lògic
2. $t \approx t \rightarrow \exists x t \approx x$ ded.
3. $\exists x t \approx x$ M.P.1,2

Hem usat $\vdash t \approx t \rightarrow \exists x t \approx x$ (ho indiquem amb 'ded'), i això surt ho hem vist a l'exemple 5.2.2. En aquest cas $\varphi = t \approx x$. Usem que x no ocorre a t per veure que $\varphi_t^x = t \approx t$.

De fet això no és una deducció, caldria reemplaçar (2) per la deducció feta a l'exemple 5.2.2. Aquest abús de llenguatge el farem constantment.

A continuació donarem uns quants metateoremes (teoremes sobre deduccions) que ens permetran simplificar la feina a l'hora de veure que una fórmula es dedueix d'un conjunt de fórmules.

Proposició 5.4.3 (generalització). *Si x no és lliure en cap de les fórmules de Σ i $\Sigma \vdash \varphi$ llavors $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.*

Demostració. Fem la demostració per inducció sobre la longitud de la deducció. Si la longitud és 1, o bé φ és un axioma lògic o bé pertany a Σ . En el primer cas $\forall x\varphi$ també és un axioma lògic i en el segon

1. φ hip.
2. $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ axioma lògic ja que $x \notin VL(\varphi)$
3. $\forall x\varphi$ M.P.1,2

és una deducció a partir de Σ . Si la longitud és més gran que 1, els casos en que φ és axioma lògic o pertany a Σ es fan igual. Si φ s'obté per M.P. de ψ i $\psi \rightarrow \varphi$, per H.I $\Sigma \vdash \forall x\psi$ i $\Sigma \vdash \forall x(\psi \rightarrow \varphi)$. Llavors

1. $\forall x(\psi \rightarrow \varphi)$ ded.
2. $\forall x(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \forall x\varphi)$ Ax. Log.
3. $\forall x\psi \rightarrow \forall x\varphi$ M.P. 1,2
4. $\forall x\psi$ ded.
5. $\forall x\varphi$ M.P. 3,4

és una deducció de $\forall x\varphi$ a partir de Σ □

Exemple 5.4.4. anem a veure que si $\varphi \vdash \psi$ llavors $\forall x\varphi \vdash \forall x\psi$. Primer veiem $\forall x\varphi \vdash \varphi$:

1. $\forall x\varphi$ hip.
2. $\forall x\varphi \rightarrow \varphi$ Ax. Log.
3. φ M.P. 1,2

per generalització obtenim que $\forall x\varphi \vdash \forall x\psi$.

Proposició 5.4.5 (teorema de la deducció). $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ sii $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Demostració. Si $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, llavors

1. $\varphi \rightarrow \psi$ ded
2. φ hip

3. ψ M.P.1,2

és una deducció de ψ a partir de Σ .

El recíproc el fem per inducció sobre la longitud de la deducció de ψ i es reduirà a veure els casos en que $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\} \cup \mathcal{A}$ o bé s'obté per modus Ponens. En el cas en que $\psi \in \Sigma \cup \mathcal{A}$

1. ψ Ax. Lògic o hip.
2. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ taut.
3. $\varphi \rightarrow \psi$ M.P.1,2

és una deducció a partir de Σ .

Si $\psi = \varphi$ només cal tenir em compte que $\varphi \rightarrow \varphi$ és una tautologia. Si ψ s'obté per M.P. de θ i $\theta \rightarrow \psi$, per H.I. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \theta$ i $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)$. Llavors

1. $\varphi \rightarrow \theta$ ded.
2. $(\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ taut.
3. $(\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ M.P.1,2
4. $\varphi \rightarrow (\theta \rightarrow \psi)$ ded.
5. $\varphi \rightarrow \psi$ M.P.3,4

□

Corollari 5.4.6 (contraposició). $\Sigma, \varphi \vdash \psi$ sii $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\varphi$.

Demostració. Pel teorema de la deducció hem de veure que $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ sii $\Sigma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$. Però les fórmules $\varphi \rightarrow \psi$ i $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ es dedueixen l'una de l'altre usant les tautologies $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ i $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. □

De fet aquesta regla presenta 4 variants segons on posem les negacions. Deixem com exercici el seu enunciat i la seva demostració.

Exemple 5.4.7. Veiem que si $\varphi \vdash \psi$ llavors $\exists x\varphi \vdash \exists x\psi$. De $\varphi \vdash \psi$, per contraposició, obtenim $\neg\psi \vdash \neg\varphi$. Per l'exemple 5.4.4 llavors $\forall x\neg\psi \vdash \forall x\neg\varphi$ i per contraposició un altre cop $\neg\forall x\neg\varphi \vdash \neg\forall x\neg\psi$. Usant els axiomes $\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$, $\exists x\psi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\psi$ obtenim $\exists x\varphi \vdash \neg\forall x\neg\varphi$ i $\neg\forall x\neg\psi \vdash \exists x\psi$, que combinat amb $\neg\forall x\neg\varphi \vdash \neg\forall x\neg\psi$ ens dona $\exists x\varphi \vdash \exists x\psi$.

Exemple 5.4.8. veiem que $\forall x\varphi \dashv\vdash \neg\exists x\neg\varphi$. Usant l'axioma $\exists x\neg\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\neg\varphi$ i tautologies tenim que $\exists x\neg\varphi \dashv\vdash \neg\forall x\neg\neg\varphi$, i per contraposició $\neg\exists x\neg\varphi \dashv\vdash \forall x\neg\neg\varphi$. Per 5.4.4 $\forall x\varphi \dashv\vdash \forall x\neg\neg\varphi$ i ja ho tenim usant la transitivitat de \vdash .

Definició 5.4.9. Σ és *inconsistent* sii $\Sigma \vdash \varphi, \neg\varphi$ per alguna fórmula φ .

Usant la tautologia $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ és fàcil veure que si Σ és inconsistent llavors $\Sigma \vdash \psi$ per tota ψ .

Coroll·lari 5.4.10 (Reducció a l'Absurd). Σ, φ és inconsistent sii $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Demostració. Si Σ, φ és inconsistent llavors $\Sigma, \varphi \vdash \neg\varphi$ i pel Teorema de la deducció $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$. Usant la tautologia $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$ i M.P. conclourem que $\Sigma \vdash \neg\varphi$. El recíproc surt perquè si $\Sigma \vdash \neg\varphi$ llavors $\Sigma, \varphi \vdash \varphi, \neg\varphi$. \square

També és cert que $\Sigma, \neg\varphi$ és inconsistent sii $\Sigma \vdash \varphi$. demostreu-ho.

Exercici 5.4.11. Demostreu semànticament 5.4.3, 5.4.5 i 5.4.6, és a dir, demostreu que també són certs si reemplaçem \vdash per \models . Demostreu que també val 5.4.10 reemplaçant consistent per satisfactible.

5.4.1 el teorema de generalització de les constants

Aquí treballarem amb dues signatures alhora i haurem d'anar en compte en quina ens movem. Quan sigui necessari posarem un subíndex S per indicar la signatura. Treballarem amb *expansions simples* d'una signatura S , que vol dir que només hem afegit a S símbols de constant. A més farem servir la notació següent. Si $\bar{c} = c_1, \dots, c_n$ són constants i $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$ són variables llavors $\varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ denota la fórmula obtinguda a partir de φ substituint cada ocurrència de c_i per y_i . Se suposa que tant les constants com les variables són diferents.

Lema 5.4.12. S' expansió simple de S , Σ un conjunt de S' -fórmules i φ una S' -fórmula. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ és una S' -deducció de φ a partir de Σ , $\bar{c} = c_1, \dots, c_n$ són totes les constants de $S' \setminus S$ que ocorren a la deducció i $\bar{y} = y_1, \dots, y_n$ són variables que no ocorren a la deducció llavors

$$(\varphi_1)_{\bar{x}}^{\bar{c}}, \dots, (\varphi_n)_{\bar{x}}^{\bar{c}}$$

és una S -deducció de $\varphi_{\bar{x}}^{\bar{c}}$ a partir de $\Sigma_{\bar{x}}^{\bar{c}}$.

Demostració. Si φ s'obté per M.P. de ψ i $\psi \rightarrow \varphi$ és clar que llavors $\varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ s'obté per M.P. de $\psi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ i $(\psi \rightarrow \varphi)_{\bar{y}}^{\bar{c}} = \psi_{\bar{y}}^{\bar{c}} \rightarrow \varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$. Només hem de veure que si φ és axioma lògic de S' llavors $\varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ és axioma lògic de S . Això s'ha de comprovar per tots els tipus. L'únic un pel delicat és l'axioma de substitució: $\varphi = \forall x\psi \rightarrow \psi_t^x$ si la substitució és lliure. Com que \bar{y} no ocorren φ , tindrem $(\psi_t^x)_{\bar{y}}^{\bar{c}} = (\psi_{\bar{y}}^{\bar{c}})_{t_{\bar{y}}^{\bar{c}}}^x$ i la substitució de x per $t_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ en $\psi_{\bar{y}}^{\bar{c}}$ és lliure. Així $\varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}} = \forall x\psi_{\bar{y}}^{\bar{c}} \rightarrow (\psi_{\bar{y}}^{\bar{c}})_{t_{\bar{y}}^{\bar{c}}}^x$ és un axioma lògic. \square

Coroll·lari 5.4.13. S' és una expansió simple de S , Σ un conjunt de S -fórmules i φ una S -fórmula. Llavors

1.

$$\Sigma \vdash_S \varphi \text{ sii } \Sigma \vdash_{S'} \varphi$$

2. Si és S -consistent sii Σ és S' -consistent.

Demostració. (1) Com que tota S -deducció és una S' -deducció, només cal veure la implicació de dreta a esquerra, i això surt del lema 5.4.12 observant que si $\varphi \in F_S$ llavors $\varphi_{\bar{y}}^{\bar{c}} = \varphi$. (2) és clar a partir de (1). \square

Quan fem la demostració del teorema de completesa estarem treballant amb conjunts consistents de fórmules d'un cert llenguatge. Aquest corollari ens permet considerar-los consistents en qualsevol expansió simple i ens permetrà relaxar la notació.

En el següent teorema ens referim a una signatura donada S .

Teorema 5.4.14 (Teorema de generalització de les constants). *Si $\Sigma \vdash \varphi_c^x$ i c no ocorre a cap fórmula de Σ ni a φ llavors $\Sigma \vdash \forall x\varphi$.*

Demostració. Pel Lema 5.4.12 hi ha $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finit i una variable y que no ocorre ni a Σ_0 ni a φ_c^x tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi_{cy}^{xc} = \varphi_y^x$. Per generalització $\Sigma_0 \vdash \forall y\varphi_y^x$. La demostració acaba veient que $\forall y\varphi_y^x \vdash \forall x\varphi$. Usant l'axioma de substitució $\forall y\varphi_y^x \rightarrow \varphi_{yx}^{xy}$ (la substitució és lliure) i tenint en compte que $\varphi_{yx}^{xy} = \varphi$ (perquè y no ocorre a φ) veiem que $\forall y\varphi_y^x \vdash \varphi$. Com que x no és lliure a $\forall y\varphi_y^x$, per generalització obtenim $\forall y\varphi_y^x \vdash \forall x\varphi$. \square

Capítol 6

El Teorema de Completesa

Definició 6.0.15. Un conjunt de S -fórmules Σ té *testimonis* si per a cada S -fórmula del tipus $\exists x\varphi$ (que comenci per un quantificador existencial) hi ha una constant c tal que $\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x \in \Sigma$.

Lema 6.0.16. Si Σ és un conjunt consistent de S -fórmules, hi ha una expansió simple S' de S i un conjunt Σ' consistent i amb testimonis de S' -fórmules tal que $\Sigma \subseteq \Sigma'$.

A més es pot fer de tal manera que $|\Sigma'| = |\Sigma| + \aleph_0$.

Demostració. Primer considerem S^* l'expansió simple de S afegint una constant nova c per cada S -fórmula que comença per un existencial (del tipus $\exists x\varphi$). Considerem el conjunt de S^* -fórmules Σ^* afegint a les fórmules de Σ totes les fórmules del tipus $\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x$, on $\exists x\varphi$ és una S -fórmula i c és la constant que li correspon. Anem a veure que Σ^* és consistent. Si no ho fos prenem un subconjunt finit minimal inconsistent Σ_1^* . Σ_1^* ha de contenir alguna fórmula del tipus $\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x$, on c és una constant nova perquè Σ és consistent. Posem $\Sigma_0^* = \Sigma_1^* \cup \{\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x\}$. Per R.A. $\Sigma_1^* \vdash \neg(\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x)$, i com que $\neg(\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x) \vdash \exists x\varphi, \neg\varphi_c^x$ deduïm que $\Sigma_1^* \vdash \exists x\varphi, \neg\varphi_c^x$. Pel Teorema de Generalització de les constants $\Sigma_1^* \vdash \forall x\neg\varphi$ i per tant Σ_1^* és inconsistent. Això contradiu la minimalitat de Σ_0^* .

El pas de Σ a Σ^* preserva la consistència, però encara no té testimonis, doncs han aparegut noves fórmules. Això s'arregla repetint aquest procés \aleph_0 vegades. Definim una cadena $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'extensions de Σ de la manera següent: $\Sigma_0 := \Sigma$, $\Sigma_{n+1} := (\Sigma_n)^*$ i prenem Σ' que sigui la unió dels Σ_n . Σ' és consistent perquè tota part finita seva ho és (doncs està continguda en alguna Σ_n) i té testimonis de Henkin, doncs tota fórmula del tipus $\exists x\varphi$ de la signatura de Σ_n té un testimoni a Σ_{n+1} .

Pel que fa a la cardinalitat de S' només cal observar que (en cada pas) hem afegit com a molt $|F_S| = |S| + \aleph_0$ constants. \square

Definició 6.0.17. Σ és *consistent maximal* sii és consistent i per a cada fórmula φ o bé $\varphi \in \Sigma$ o bé $\neg\varphi \in \Sigma$.

Si Σ és consistent maximal tindrem que exactament una de les dues fórmules $\varphi, \neg\varphi$ està a Σ . aquests conjunts tenen molt bones propietats:

Observació 6.0.18. Si Σ és consistent maximal llavors:

1. $\Sigma \vdash \varphi$ sii $\varphi \in \Sigma$
2. $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ sii o bé $\varphi \in \Sigma$ o bé $\psi \in \Sigma$
3. $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$ sii $\varphi \in \Sigma$ i $\psi \in \Sigma$
4. $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ sii o bé $\varphi \notin \Sigma$ o bé $\psi \in \Sigma$
5. $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Sigma$ sii o bé $\varphi, \psi \in \Sigma$ o bé $\varphi, \psi \notin \Sigma$.

Demostració. Ho deixem com a exercici. □

Lema 6.0.19. *Tot conjunt consistent de S -fórmules es pot estendre a un conjunt consistent maximal de S -fórmules.*

Demostració. Usem el Lema de Zorn. Sigui Σ un conjunt consistent de S -fórmules. Considerem R el conjunt dels conjunts consistents de S -fórmules que contenen Σ ordenat per inclusió. Com que la consistència és finitària, tota cadena d'elements de R té una cota superior: la unió. Pel lema de Zorn Prenem Σ' un maximal de R i veiem que és el que busquem. Si $\varphi \notin \Sigma'$ i $\neg\varphi \notin \Sigma'$ llavors, per maximalitat $\Sigma' \cup \{\varphi\}$ i $\Sigma' \cup \{\neg\varphi\}$ són inconsistents i per R.A. $\Sigma' \vdash \varphi, \neg\varphi$. Això contradia la consistència de Σ' . □

Corollari 6.0.20. *Si Σ és un conjunt consistent de S -fórmules, hi ha una expansió simple S' de S amb $|S'| = |S| + \aleph_0$ i un conjunt Σ' consistent maximal i amb testimonis de S' -fórmules tal que $\Sigma \subseteq \Sigma'$.*

Demostració. Primer apliquem 6.0.16 i després 6.0.19. Observem que el segon pas no espatlla el primer perquè no ampliem S . □

Teorema 6.0.21 (Teorema de completeness). *Si Σ és consistent, existeixen M i $\sigma : V \rightarrow M$ tal que $M \models \Sigma[\varphi]$. A més, es pot fer de tal manera que $|M| \leq |S| + \aleph_0$.*

Demostració. Per 6.0.20 podem suposar que Σ és consistent maximal i amb testimonis passant a una expansió simple de S . Observem que en aquest procés a $|S|$ l'hi sumem com a molt \aleph_0 .

Anem a definir M . El domini de M serà T_S / \sim , on \sim ve definida per $t_1 \sim t_2$ sii $t_1 \approx t_2 \in \Sigma$. Dels axiomes de la igualtat (o de 4.5.1) es dedueix que \sim és relació d'equivalència. Per exemple, per demostrar la reflexiva hem de veure que $t \approx t \in \Sigma$. Això surt de $\Sigma \vdash t \approx t$ tenint en compte la observació (1) de 6.0.18.

Ara definim la interpretació dels símbols no lògics:

- Si $c \in \mathcal{C}$, definim $c^M = c / \sim$.

- Si f és un símbol funcional n -ari definim f^M així:

$$f^M(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) = ft_1 \cdots t_n/\sim.$$

Això està ben definit doncs si $t_i \approx u_i \in \Sigma$ per $i = 1 \dots n$, usant els axiomes de la igualtat (o 4.5.1), llavors $ft_1 \cdots t_n \approx fu_1 \cdots u_n \in \Sigma$.

- Si r és un símbol de relació n -ari, definim:

$$(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in r^M \text{ sii } rt_1 \cdots t_n \in \Sigma.$$

Està ben definit, doncs de $t_i \approx u_i \in \Sigma$, usant els axiomes de la igualtat (o 4.5.1) deduïm $rt_1 \cdots t_n \in \Sigma$ sii $ru_1 \cdots u_n \in \Sigma$.

De fet, per construir M , en tenim prou amb les constants, ja que per a tot $t \in T_S$ hi ha una constant c tal que $t/\sim = c/\sim$. Per 5.4.2 (o 4.5.2), $\exists xt \approx x \in \Sigma$ per una certa variable x . D'altra banda, com que Σ té testimonis, la fórmula $\exists xt \approx x \rightarrow t \approx c \in \Sigma$ per una certa constant c . Per completesa de Σ , $t \approx c \in \Sigma$.

Ara definim σ :

- $\sigma(x) = x/\sim$.

Ara es fàcil demostrar, per inducció sobre t , que $t^M[\sigma] = t/\sim$.

Finalment anem a demostrar, per inducció (sobre la longitud de la fórmula!) que

$$M \models \varphi[\sigma] \text{ sii } \varphi \in \Sigma \tag{6.0.1}$$

i amb això ja haurem acabat.

Si $\varphi = t_1 \approx t_2$, $M \models t_1 \approx t_2[\sigma]$ sii $t_1/\sim = t_2/\sim$ sii $t_1 \approx t_2 \in \Sigma$.
Si $\varphi = rt_1 \cdots t_n$, $M \models rt_1 \cdots t_n[\sigma]$ sii $(t_1/\sim, \dots, t_n/\sim) \in r^M$ sii $rt_1 \cdots t_n \in \Sigma$. Les connectives lògiques es fan totes igual, usant 6.0.18. Fem, per exemple, la negació:

$$M \models \neg\varphi[\sigma] \text{ sii } M \not\models \varphi[\sigma] \text{ sii } \varphi \notin \Sigma \text{ sii (per maximalitat) } \neg\varphi \in \Sigma.$$

L'únic punt delicat són els quantificadors. Per a l'existencial, hem de veure

$$M \models \exists x\varphi[\sigma] \text{ sii } \exists x\varphi \in \Sigma.$$

Observem primer que $M \models \exists x\varphi[\sigma]$ sii hi ha una constant c tal que $\varphi_c^x \in \Sigma$:
 $M \models \varphi[\sigma_{c/\sim}^x]$ sii (pel lema de substitució) $M \models \varphi_c^x[\sigma]$ sii (per H.I) $\varphi_c^x \in \Sigma$.
Com que $\vdash \varphi_c^x \rightarrow \exists x\varphi$ (per 5.2.2 o la regla (I \exists)) llavors $\varphi_c^x \rightarrow \exists x\varphi \in \Sigma$. Per completesa tenim la implicació d'esquerra a dreta. Recíprocament, si $\exists x\varphi \in \Sigma$ i com que Σ té testimonis $\exists x\varphi \rightarrow \varphi_c^x \in \Sigma$ per alguna constant c . Per completesa deduïm que $\varphi_c^x \in \Sigma$.

Els cas del quantificador universal es fa anàlogament: tindrem que $M \models \forall x\varphi[\sigma]$ sii $\varphi_c^x \in \Sigma$ per a tota constant c . Una implicació sortirà usant que $(\forall x\varphi \rightarrow \varphi_c^x) \in \Sigma$ per a tota constant c (per ser axioma lògic o per (E \forall)). L'altre surt perquè hi ha una c tal que $(\varphi_c^x \rightarrow \forall x\varphi) \in \Sigma$. Això últim surt, usant 6.0.18 (o exercici pel lector) i 5.4.8 de que $(\exists x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \in \Sigma$ per una certa c .

Pel que fa a la cardinalitat: $|M| \leq |T_S| \leq |S| + \aleph_0$. \square

De 5.3.1 (o 4.3.2 i 6.0.21) obtenim el teorema de completesa en la seva forma usual. Es pot enunciar de dues maneres equivalents.

Definició 6.0.22. Es diu que un conjunt de fórmules Σ és satisfactible si existeix una estructura M i $\sigma : V \rightarrow M$ tals que $M \models \Sigma[\sigma]$.

Teorema 6.0.23 (Teorema de Completesa). *Si $\Sigma \subseteq F_S$ i $\varphi \in F_S$ llavors*

1.

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{sii} \quad \Sigma \vdash \varphi$$

2.

Σ és consistent sii Σ és satisfactible.

Demostració. (1). La implicació de dreta a esquerra és 5.3.1. Si $\Sigma \models \varphi$ llavors $\Sigma, \neg\varphi$ és insatisfactible. Per 6.0.21 $\Sigma, \neg\varphi$ és inconsistent i per R.A. $\Sigma \vdash \varphi$.

(2). La implicació d'esquerra a dreta és 6.0.21. Si Σ és inconsistent llavors $\Sigma \vdash \varphi, \neg\varphi$ per alguna fórmula φ . Llavors $\Sigma \models \varphi, \neg\varphi$ i per tant és insatisfactible. \square

Capítol 7

Introducció a la teoria a models

7.1 Els teoremes de Compacitat i Löwenheim-Skolem

En aquesta secció veurem dues conseqüències fonamentals del teorema de completesa (i de la seva demostració): els teoremes de compacitat i Löwenheim-Skolem.

Com que \vdash és un operador finitari, del teorema de completesa 6.0.23 en deduïm que \models també ho és, i això no és trivial. És el teorema de compacitat. Encara que val per a fórmules en general, l'enunciem per a sentències, que és com s'utilitza a la pràctica.

Teorema 7.1.1 (Teorema de compacitat). *Si $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$ i $\varphi \in \text{SENT}_S$ llavors:*

1. Σ té models sii tot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finit té models.
2. $\Sigma \models \varphi$ sii per a tot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $\Sigma_0 \models \varphi$.

Teorema 7.1.2 (Löwenheim-Skolem descendent). $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$. *Si Σ té models, llavors Σ té models de cardinal com a molt $|S| + \aleph_0$.*

Demostració. Si Σ té models, per 6.0.23 ha de ser consistent i per 6.0.21 ha de tenir algun model de cardinal com a molt $|S| + \aleph_0$. \square

Teorema 7.1.3 (Löwenheim-Skolem ascendent). $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$. *Si Σ té models infinits, llavors Σ té com a mínim un model de cardinal λ per a cada $\lambda \geq |S| + \aleph_0$.*

Demostració. Considerem S' l'expansió simple de S que s'obté al afegir $\{c_i \mid i \in I\}$, un conjunt de λ constants ($|I| = \lambda$) i $\Sigma' := \Sigma \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j, i, j \in I\}$. Tota part finita Σ_0 de Σ' té un model: només cal prendre el model infinit M de

Σ i interpretar les constants que hi apareixen (un nombre finit) com elements diferents de M . Per compacitat Σ' té un model. Per 7.1.2 Σ' té un model N de cardinal com a molt $|S'| = |S| + \lambda = \lambda$. Per ser model de Σ' , el seu cardinal ha de ser com mínim λ (doncs conté λ elements diferents: la interpretació de les constants). Tot plegat: $|N| = \lambda$. \square

De fet n'hi ha prou que Σ tingui models finits de cardinal no fitat:

Proposició 7.1.4. $\Sigma \subseteq \text{SENT}_S$. Si Σ té models finits de cardinal arbitràriament gran llavors Σ té models infinits.

Demostració. Considerem $\Sigma' = \Sigma \cup \{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, on $\varphi_{\geq n}$ és una sentència expressant que hi ha com a mínim n elements diferents. Per hipòtesi, tota part finita de Σ' té models, i per compacitat, Σ' té models. Però els models de Σ' són els models infinits de Σ . \square

7.2 Equivalència elemental i teories completes

Notació 7.2.1. Si M és una S -estructura, $\text{Th}(M)$ denota el conjunt de S -sentències que valen en M .

Definició 7.2.2. Dues S estructures M, N són *elementalment equivalents* si $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$ i ho denotarem per $M \equiv N$.

Observació 7.2.3. $M \equiv N$ sii $\text{Th}(M) \subseteq \text{Th}(N)$ sii $N \in \text{Mod}(\text{Th}(M))$.

Demostració. Ja que $M \not\models \varphi$ sii $M \models \neg\varphi$. \square

Pel Teorema de l'homomorfisme 3.5.2, Si $M \cong N$ llavors $M \equiv N$. En general, 'ser elementalment equivalent' és més dèbil que 'ser isomorf'. De fet només coincideixen per estructures finites:

Teorema 7.2.4. 1. Si M és infinita hi ha estructures elementalment equivalents i no isomorfs a M .

2. Si M és finita i $N \equiv M$ llavors M i N són isomorfs.

Demostració. (1). per 7.1.3 $\text{Th}(M)$ té models de cardinal diferent a $|M|$ i per tant no isomorfs a M .

(2). Comencem pel cas en que S és finit. Anem a veure que hi ha una sentència φ_M que descriu el tipus d'isomorfia de M . Si $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ considerem la sentència $\varphi_M := \exists x_1, \dots, x_n \psi_M$, on

$$\psi_M := \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\approx x_j \wedge \forall y \left(\bigvee_{i=1}^n y \approx x_i \right) \wedge \bigwedge_{s \in S} \psi_s \right),$$

i la fórmula ψ_s descriu la interpretació del símbol s en M de la manera següent. Si $s = c$ és una constant i $c^M = a_i$ llavors $\psi_c := c \approx x_i$. Si $s = f$ és un símbol funcional m -ari

$$\psi_f := \bigwedge_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = x_{g(i_1, \dots, i_m)},$$

on $f^M(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) = a_{g(i_1, \dots, i_m)}$. Si $s = r$ és un símbol de relació m -ari

$$\psi_r := \bigwedge_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in r^M} r x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \wedge \bigwedge_{(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) \in M^m \setminus r^M} \neg r x_{i_1}, \dots, x_{i_m}.$$

És clar que $N \models \psi_M(b_1, \dots, b_n)$ sii $a_i \mapsto b_i$ és un isomorfisme. Així $N \models \varphi_M$ sii $N \cong M$.

Ara anem a fer el cas en que S és infinit. Suposem $M \equiv N$. És clar que llavors N és finita i del mateix cardinal que M . Si $M \not\cong N$, per a cada bijecció g de M en M hi ha un símbol s_g que no es preserva per g (el que impedeix que g sigui un isomorfisme). Com que només hi ha un nombre finit de bijeccions entre M i N la signatura $S' := \{s_g \mid g : M \rightarrow N \text{ bijectiva}\}$ és finita i $M \upharpoonright S' \not\cong N \upharpoonright S'$ en canvi $M \upharpoonright S' \equiv N \upharpoonright S'$, contradicció. \square

Definició 7.2.5. 1. Una teoria T és un conjunt de sentències tancat per conseqüència lògica.

2. Direm que una teoria és *completa*¹ quan per a tota sentència φ , o bé $\varphi \in T$ o bé $\neg\varphi \in T$.

Per exemple $\text{Th}(M)$ sempre és una teoria completa (i consistent). De fet aquestes són totes:

Proposició 7.2.6. T teoria consistent. Són equivalents:

1. T és completa
2. Tots els models de T són elementalment equivalents
3. $T = \text{Th}(M)$ si $M \in \text{Mod}(T)$

Demostració. Ho deixem com a exercici. \square

Observació 7.2.7. 1. Tot conjunt de sentències Σ determina una teoria: el conjunt de les seves conseqüències lògiques $\text{Con}(\Sigma) := \{\varphi \in \text{SENT}_S \mid \Sigma \models \varphi\}$.

2. Si $T := \text{Con}(\Sigma)$ direm que Σ axiomatitza T .

3. Quan $T = \text{Cons}(\{\varphi\})$ direm que T és finitament axiomatitzable.

¹Aquesta noció es diferent de la completesa d'un conjunt de fórmules donada en 6.0.17. Una teoria mai és completa en el sentit de 6.0.17. Ni tan sols implica que $T \models \varphi$ o $T \models \neg\varphi$ per a cada fórmula

4. T és finitament axiomatitzable sii $\text{Mod}(T)$ és elemental.

Si una teoria T té un únic model M (llevat isomorfia), per 7.2.4 aquest model ha de ser finit. A més, si S és finit T ve axiomatitzada per φ_M .

Definició 7.2.8. T una teoria i λ un cardinal. T és λ -categòrica sii T té un únic model (llevat isomorfia) de cardinal λ .

Proposició 7.2.9 (Test de Los-Vaught). *Si T és consistent, no té models finits i és λ -categòrica en algun cardinal $\lambda \geq |S| + \aleph_0$ llavors T és completa.*

Demostració. per 7.2.6 hem de veure que dos models M i N de T són elementalment equivalents. Per 7.1.3 prenem M' i N' models de $\text{Th}(M)$ i $\text{Th}(N)$ respectivament de cardinal λ . Per categoricitat $M' \cong N'$. Llavors $M \equiv M' \equiv N' \equiv N$. \square

Exemple 7.2.10. Per 7.2.9 (i una miqueta de treball per tal de justificar-ne la categoricitat en cada cas), són teories completes:

1. La teoria dels (purs) conjunts infinits: $S = \emptyset$ i T és la teoria axiomatitzada per $\{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. T és categòrica en qualsevol cardinal.
2. La teoria dels ordres densos (més precisament: ordres totals densos i sense extrems) $S = \{<\}$ i T_{OLDSE} és la teoria axiomatitzada per $\forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow x < y < z)$, $\forall x \exists y \exists z (y < x < z)$ més un axioma expressat que $<$ és ordre total. Llavors T_{OLDSE} és \aleph_0 -categòrica (cal demostrar-ho per Back and Forth) però no és categòrica en cap altre cardinal infinit.
3. La Teoria del cossos algebraicament tancats de característica fixada és categòrica en qualsevol cardinal no numerable, en canvi no és \aleph_0 -categòrica. Això és clar utilitzant el criteri de Steinitz per a la isomorfia de cossos sobre el cos primer.
4. Si k és un cos finit, la teoria dels k -espais vectorials infinits és categòrica en qualsevol cardinal.
5. Si k és un cos infinit, la teoria dels k -espais vectorials infinits és categòrica només en cardinal no numerable.