Geometria Computacional

Facultat d'Informàtica de Barcelona. UPC.

Transparències: Espai Afí i Geometria Mètrica

Mercè Mora

Curs 2002-2003/Q2

L'ESPAI AFÍ REAL

ESPAI AFÍ (I)

L'*espai afí real* de dimensió n, (E, V), està format per:

- E, conjunt de punts

- V, $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió n

- $+$ operació binària,

$$\begin{array}{ccccccc} + & : & E & \times & V & \longrightarrow & E \\ & & (p & , & \overrightarrow{u}) & \longrightarrow & p + \overrightarrow{u} \end{array}$$

tal que:

1. $(p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

2. $\forall p, q \in E$, existeix un únic vector $\overrightarrow{u} \in V$ tal que $p + \overrightarrow{u} = q$.

(Notació: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{pq} = q - p$)

ESPAI AFÍ (II): Observacions

1. $\forall p \in E,\ p + \overrightarrow{0} = p$

2. $\forall p \in E, \forall \overrightarrow{u} \in V,\ \ p + \overrightarrow{u} = p \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

3. $\forall p \in E,\ p + V = E$

SISTEMES DE REFERÈNCIA

Un *sistema de referència* (o coordenades) de l'espai afí real (E, V) de dimensió n és:

$$S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$$

on:

• $O \in E$ (origen de cooordenades)

• $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és base de V (determinen els eixos de coordenades)

COORDENADES AFINS

Les *coordenades afins* del punt P respecte del sistema de referència $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$ són les coordenades $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ del vector $\overrightarrow{OP}$ respecte de la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$\overrightarrow{OP} = p_1e_1 + p_2e_2 + \cdots + p_ne_n$$

• Notació: $P = (p_1, \ldots, p_n)$.

• Fixat un origen O podem identificar els punts de E amb els vectors de V, per mitjà de l'aplicació que fa correspondre al punt P el vector $\overrightarrow{OP}$.

• Si $P = (p_1, \ldots, p_n)$ i $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ respecte S, els components de $\overrightarrow{PQ}$ respecte $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ són $Q - P = (q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$. És a dir, té sentit escriure $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

EXEMPLES

1. Les dues diagonals d'un paral.lelogram es tallen als punts mitjans

2. Les tres medianes d'un triangle ABC es tallen a un punt de coordenades $\frac{1}{3}(A+B+C)$ anomenat $baricentre$.

3. Les coordenades del punt mitjà M d'un segment $\overline{AB}$ són $M = \frac{1}{2}(A+B)$.

4. Trobar les coordenades del punt mitjà de la mediana per A del triangle ABC de $\mathbb{R}^3$ en funció de les coordenades de A, B i C.

VARIETATS LINEALS

La *varietat lineal* (afí) que passa per $P \in E$ i té subespai director $U \subset V$, on U és subespai vectorial de V, és el conjunt X de punts:

$$X = P + U = \{P + u | u \in U\} =$$
$$= \{Q \in E | Q = P + u, u \in U\} = \{Q \in E | \overrightarrow{PQ} \in U\}$$

• La *dimensió* de X és la dimensió de U.

• Les varietats lineals $X = P + U$, $Y = Q + W$ són *paral.leles* si $U \subset W$ o bé $W \subset U$.

CANVI DE SISTEMES DE REFERÈNCIA (I): CANVI D'ORIGEN

Considerem els sistemes de referència: $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$

$S' = (O', \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$.

Si el punt P té coordenades: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecte S

$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ respecte S'

Si el punt O' té coordenades $W = (w_1, \ldots w_n)$ respecte S
(és a dir, $\overrightarrow{OO'} = w_1 e_1 + \ldots w_n e_n$)

Llavors,

$$X = X' + W \qquad\qquad X' = X - W$$

CANVI DE SISTEMES DE REFERÈNCIA (II): CANVI D'EIXOS

Considerem els sistemes de referència: $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$
$S' = (O, \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\})$.

Si el punt P té coordenades: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecte S
$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ respecte S'

Si A és la matriu de canvi de base: la columna k-èssima de A conté els components del vector e'_k respecte la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Llavors,

$$X = AX' \qquad\qquad X' = A^{-1}X$$

CANVI DE SISTEMES DE REFERÈNCIA (III)

Considerem els sistemes de referència: $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$
$S' = (O', \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\})$.

Si el punt P té coordenades: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecte S
$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ respecte S'

Si el punt O' té coordenades $W = (w_1, \ldots w_n)$ respecte S
(és a dir, $\overrightarrow{OO'} = w_1 e_1 + \ldots w_n e_n$)

Si A és la matriu de canvi de base: la columna k-èssima de A conté els components del vector e'_k respecte la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Llavors,

$$X = AX' + W \qquad\qquad X' = A^{-1}(X - W) = A^{-1}X - A^{-1}W$$

CANVI DE SISTEMES DE REFERÈNCIA (i IV): COMPOSICIÓ

$S = (O, \{e_1, \ldots, e_n\})$ $\quad X = (x_1, \ldots, x_n)$ coord. de P resp. S
$S' = (O', \{e'_1, \ldots, e'_n\})$ $\quad X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ coord. de P resp. S'
$S'' = (O'', \{e''_1, \ldots, e''_n\})$ $\quad X'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ coord. de P resp. S''

A: $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ respecte $\{e_1, \ldots, e_n\}$
B: $\{e''_1, \ldots, e''_n\}$ respecte $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$

W: coordenades de O' respecte S
V: coordenades de O'' respecte S'

$$\left.\begin{array}{r} X = AX' + W \\ X' = BX'' + V \end{array}\right\} \Rightarrow X = (AB)X'' + (AV + W)$$

MATRIUS AMPLIADES (I)

Si A és una matriu quadrada $n \times n$ i W un vector columna amb n coordenades, definim la matriu ampliada:

$$M_{A,W} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & W \\ - & - & - & - \\ & 0 & & 1 \end{array} \right)$$

- Expressió del canvi de coordenades amb matrius ampliades:

$$\begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

MATRIUS AMPLIADES (i II)

- Canvi invers:

$$\begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observació: $M_{A,W}^{-1} = M_{A^{-1},-A^{-1}W}$

- Composició de canvis de coordenades:

$$\begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \cdot M_{B,V} \begin{pmatrix} X'' \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observació: $M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{AB,AV+W}$

ORIENTACIÓ

• Dues bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial V de dimensió n determinen la mateixa orientació si $\det_{\{e_i\}}\{u_i\} > 0$.

• Orientar un espai vectorial $V \equiv$ fixar una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V (orientació positiva o directa).
Bases de V amb orientació positiva $\equiv$ bases que tenen la mateixa orientació que $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

• Orientar un espai afí $(E, V) \equiv$ orientar l'espai vectorial V

GEOMETRIA MÈTRICA

1 Producte escalar

2 Norma

3 Distància

4 Angles

5 Bases ortonormals

6 Producte vectorial

7 Equació mètrica del pla

8 Projecció ortogonal

PRODUCTE ESCALAR

Un *producte escalar* a un $\mathbb{R}$-espai vectorial V és una forma bilineal simètrica definida positiva:

$$\begin{array}{rccc} \cdot \; : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longrightarrow & u \cdot v \end{array}$$

tal que $\forall u, v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

bilineal: $(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$

$(\lambda u)\cdot v = \lambda(u\cdot v)$

$u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$

$u\cdot(\lambda v) = \lambda(u\cdot v)$

simètrica: $u\cdot v = v\cdot u$

definida positiva: $u\cdot u \geq 0$

$u\cdot u = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$

- Observació: $\overrightarrow{0} \cdot u = u \cdot \overrightarrow{0} = 0$

- Notacions: $u \cdot v$, (u, v), $< u, v >$,$\ldots$

- Espai vectorial euclidià: espai vectorial on s'hi ha definit un producte escalar.
Notació: $(V, \cdot)$.

- Espai afí euclidià: espai afí (E, V) on $(V, \cdot)$ és un espai vectorial euclidià.

DESIGUALTAT DE SCHWARZ

$(V, \cdot)$ espai vectorial euclidià, $\forall u, v \in V$, $(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$

A més, val la igualtat $\Leftrightarrow$ els vectors u, v són lin. dependents.

- Formulació equivalent: $|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}$
- **Corol.lari:** $\forall u, v \in V$,

$$u, v \text{ són lin. independents } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} > 0$$

$$u, v \text{ són lin. dependents } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix} = 0$$

NORMA (I)

Una *norma* a un espai vectorial real V és una aplicació

$$\begin{array}{rcccl} \|\ \| & : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & u & \longrightarrow & \|u\| \geq 0 \end{array}$$

tal que $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular)

• *Espai normat*: espai vectorial real on s'hi ha definit una norma.
Notació: $(V, \|\ \|)$.

• *Vector unitari*: vector $u \in V$ tal que $\|u\| = 1$.

NORMA (II)

Propietats:

1. Si $u \in V,\ u \neq \overrightarrow{0}$, $\quad \dfrac{u}{\|u\|}$ és un vector unitari

$\left\{ u, \dfrac{u}{\|u\|} \right\}$ són linealment dependents

2. $\forall u, v \in V$, $\quad |\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u - v\|$

NORMA (i III)

Norma derivada d'un producte escalar:

Si $(V, \cdot)$ és un espai vectorial euclidià, l'aplicació

$$\begin{array}{rcccl} \| \ \| & : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & u & \longrightarrow & \|u\| = +\sqrt{u \cdot u} \end{array}$$

és una norma a V

• S'anomena *norma derivada del producte escalar* $\cdot$

• Si $\| \ \|$ és la norma derivada del producte escalar $\cdot$, la desigualtat de Schwarz es pot escriure:

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \ \|v\|$$

• Hi ha normes que no deriven de cap producte escalar

DISTÀNCIA

Una distància a un conjunt E és una aplicació

$$\begin{array}{rcccl} d & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) \end{array}$$

tal que $\forall x, y, z \in E$,
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

• Si $(V, \| \ \|)$ és un espai normat, l'aplicació $d(u,v) = \|v - u\|$ defineix una distància a V.

• Si (E, V) és un espai afí i $\| \ \|$ una norma a V, llavors l'aplicació $d(x,y) = \|y - x\| = \|\overrightarrow{xy}\|$ defineix una distància a E.

ANGLES (I)

Si $(V, \cdot)$ és un espai vectorial euclidià, l'*angle* determinat pels vectors $u, v \in V$ és el valor únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos \alpha = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \; \|v\|}$

• Està ben definit ja que per la desigualtat de Schwarz,
$\forall u, v \in V, \quad$ es té $\; -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \; \|v\|} \leq 1$

• Si la dimensió de V és 2 i la base $\{e_1, e_2\}$ determina l'orientació positiva, es defineix l'angle orientat 2D format pels vectors linealment independents u, v:

$$\text{angleOr2D}(u, v) = \text{sgn}(det_{\{e_i\}}(u, v)) \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \; \|v\|}$$

ANGLES (II)

ORTOGONALITAT:

• Dos vectors $u, v \in V$ de l'espai vectorial euclidià $(v, \cdot)$ són *ortogonals* si $\alpha = \pi/2$, és a dir, si $u \cdot v = 0$. Notació: $u \perp v$.

• Si $u, v \in V$ són ortogonals, $\lambda u, \mu v$ són ortogonals per a qualssevol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ANGLES (i III)

EXEMPLES

1. Teorema de Pitàgores: u, v són ortogonals $\Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

2. Teorema del cosinus: Si a, b, c són les longituds dels costats oposats als vèrtexs A, B, C del triangle ABC i $\alpha = \widehat{BAC}$, llavors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

3. L'angle inscrit a una semicircumferència és $\pi/2$.

4. Càlcul de les longituds i l'angle que formen les diagonals d'un paral.lelogram

5. Equació de la bisectriu d'un angle

BASES ORTONORMALS

• Una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ d'un espai vectorial euclidià $(V, \cdot)$ és *orto-normal* si els vectors són unitaris i ortogonals dos a dos:

$$e_i \cdot e_i = 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$e_i \cdot e_j = 0, \text{ si } i \neq j$$

• Un sistema de referència $S = (O, \{e_1, \ldots, e_n\})$ de l'espai afí euclidià (E, V) és *cartesià* si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base ortonormal.

ÚS DE BASES ORTONORMALS

$(V, \cdot)$ espai vect. euclidià, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de V
$\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ resp. B

- Expressió del producte escalar:
$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Expressió de la norma derivada del producte escalar:
$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

- Expressió de l'angle determinat per dos vectors:
$$\text{angle}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \text{arccos} \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

- Coordenades d'un vector qualsevol:
$$\overrightarrow{x} = \textstyle\sum_{i=1}^n (e_i \cdot \overrightarrow{x}) e_i$$

ÚS DE SISTEMES DE REFERÈNCIA CARTESIANS (I)

Distància entre dos punts:

(E, V) espai afí
$S = (O, \{e_1, \dots e_n\})$ sist. de ref. cartesià
$P, Q \in E$, $P = (p_1, \dots, p_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$ resp. S,

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2}$$

ÚS DE SISTEMES DE REFERÈNCIA CARTESIANS (i II)

Canvis de sistemes de referència:

$S = (O, \{e_1, \ldots e_n\})$, $S = (O', \{e'_1, \ldots e'_n\})$ sist. de ref. cartesians
$X = (x_1, \ldots, x_n)$, $X' = (x'_1, \ldots x'_n)$ coordenades de P resp. S, S'
A matriu de canvi de base: vectors e'_k respecte $\{e_1, \ldots e_n\}$

• A és una matriu ortogonal: $AA^T = I$, o equivalentment, $A^{-1} = A^T$.

• Expressió de l'equació de canvi de coordenades:

$$X = AX' + W$$

$$X' = A^T(X - W) = A^T X - A^T W$$

OBTENCIÓ DE BASES ORTONORMALS (I)

• Propietat: $\{u_1, \ldots u_k\}$ vectors no nuls i ortogonals dos a dos d'un espai vectorial euclidià $\Rightarrow$ són linealment independents.

• Corol.lari: n vectors no nuls i ortogonals dos a dos d'un e.v. euclidià de dimensió n formen una base.

• Conseqüència: $\{e_1, \ldots e_n\}$ no nuls i ortogonals dos a dos d'un e.v. euclidià de dimensió $n \Rightarrow \left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$ és base ortonormal de V

OBTENCIÓ DE BASES ORTONORMALS (II)

• Si $u = (a, b)$ és un vector no nul de l'espai vectorial euclidià $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar usual,

$$\left\{ \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{(-b,a)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\} \text{ és base ortonormal directa}$$

OBTENCIÓ DE BASES ORTONORMALS (III): Mètode de Gram-Schmidt

Si $\{e_1, \ldots e_n\}$ és una bse d'un espai vectorial euclidià V, els vectors $\{u_1, \ldots u_n\}$ que s'obtenen recursivament com s'indica a continuació, formen una base ortonormal:

$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$

$$u_k = \frac{e_k - \sum_{j=1}^{k-1}(e_k \cdot u_j)u_j}{\|e_k - \sum_{j=1}^{k-1}(e_k \cdot u_j)u_j\|}, \ \forall k \geq 2$$

PRODUCTE VECTORIAL (I)

Considerem l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar usual i una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$.

El producte vectorial és l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} \wedge & : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longrightarrow & u \wedge v \end{array}$$

definida per $u \wedge v = (\text{det}(u,v,e_1), \text{det}(u,v,e_2), \text{det}(u,v,e_3)) =$
$= (u_2v_3 - v_2u_3, -(u_1v_3 - v_1u_3), u_1v_2 - v_1u_2)$

• Fixats u, v, el producte vectorial $u \wedge v$ és l'únic vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,\ \text{det}(u,v,w) = (u \wedge v) \cdot w,$

PRODUCTE VECTORIAL (II)

PROPIETATS. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $u \wedge v = -v \wedge u, \quad u \wedge u = \overrightarrow{0}$

2. $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v) = u \wedge (\lambda v)$
$(u+v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$
$u \wedge (v+w) = u \wedge v + u \wedge w$

3. $u \wedge v = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u, v$ són linealment dependents

4. $u \perp (u \wedge v),\ v \perp (u \wedge v)$

5. El producte vectorial no és associatiu. Contraexemple: Si $u = (1,0,0), v = (0,1,0), w = (1,1,1)$, $(u \wedge v) \wedge w = (-1,1,0) \neq (0,1,0) = u \wedge (v \wedge w)$

6. $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \alpha$,
on $\alpha = \text{angle}(u, v)$

7. u, v linealment independents $\Rightarrow \{u, v, u \wedge v\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ amb la mateixa orientació que $\{e_1, e_2, e_3\}$

8. u, v ortogonals i unitaris $\Rightarrow \{u, v, u \wedge v\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ amb la mateixa orientació que $\{e_1, e_2, e_3\}$

EQUACIÓ MÈTRICA DEL PLA (I)

Equació d'un pla π de $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz + d = 0$
Notació: $u = (a, b, c)$, $X = (x, y, z)$

- u és un vector normal al pla: $\forall P, Q \in \pi, \quad u \perp \overrightarrow{PQ}$

- L'equació de π es pot escriure $u \cdot X + d = 0$

EQUACIÓ MÈTRICA DEL PLA (II)

P punt

π pla: $ax + by + cz + d = 0$

$$u = (a, b, c),\ X = (x, y, z) \Rightarrow u \cdot X + d = 0$$

- Recta que passa per P perpendicular a π:

$$r: \quad X = P + \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Projecció ortogonal del punt P sobre sobre el pla π:

$$P' = r \cap \pi = P - \left(\frac{u \cdot P + d}{u \cdot u} \right) u$$

- Distància del punt P al pla π:

$$d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{|u \cdot P + d|}{\|u\|}$$

EQUACIÓ MÈTRICA DEL PLA (III)

P punt

r recta que passa per Q i de vector director v: $X = Q + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}$

- Pla que passa per P perpendicular a r:

$$\pi : (X - P) \cdot v = 0$$

- Projecció ortogonal de P sobre r:

$$P' = r \cap \pi = Q - \left(\frac{v \cdot \overrightarrow{PQ}}{v \cdot v} \right) v$$

- Distància del punt P a la recta r:

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \frac{(v \cdot \overrightarrow{PQ})^2}{v \cdot v}}$$

$$d(P, r) = \frac{\|v \wedge \overrightarrow{PQ}\|}{\|v\|}$$

EQUACIÓ MÈTRICA DEL PLA (i IV)

r recta que passa per A i té vector director v: $X = A + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}$
s recta que passa per B i té vector director w: $X = B + \mu w,\ \mu \in \mathbb{R}$

• Distància entre r i s:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot u|}{\|u\|}, \quad \text{on } u = v \wedge w$$

PROJECCIÓ ORTOGONAL (I)

V espai vectorial euclidià, F subespai de V.

- *Vector ortogonal* a F: $x \in V$ tal que $x \perp u$, $\forall u \in F$.
  Notació: $u \perp F$

- Si $\{e_1, \dots e_k\}$ és una base de F:
$$u \perp F \Leftrightarrow u \perp e_i, \ \forall i \in \{1, \dots k\}$$

- *Projecció ortogonal* d'un vector $x \in V$ sobre F:
$$\mathrm{pr}_F(x) = w \in V \text{ tal que } \begin{cases} w \in F \\ (x - w) \perp F \end{cases}$$

PROJECCIÓ ORTOGONAL (II)

Càlcul de la projecció ortogonal:

- Directament, imposant les condicions de la definició
- Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és una base ortonormal de F:

$$\mathrm{pr}_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot u_i) u_i$$

PROJECCIÓ ORTOGONAL (i III)

A l'espai afí $\mathbb{R}^3$:

• Projecció ortogonal del punt P sobre la recta $r : X = Q + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$P' = Q + \mathrm{pr}_F(\overrightarrow{QP})$$

on $F =< u >$ (subespai vectorial generat per u)

• Projecció ortogonal del punt P sobre el pla π que passa per Q i té subespai director $F =< u, v >$:

$$P' = Q + \mathrm{pr}_F(\overrightarrow{QP})$$