Geometria Computacional

Facultat d'Informàtica de Barcelona. UPC.

Transparències: Corbes i Superfícies

Mercè Mora

Curs 2002-2003/Q2

CORBES

1 Formes de descriure una corba

2 Paràbola, el.lipse, hipèrbola

3 Altres corbes 2D i 3D

4 Vector tangent i normal a una corba

5 Propietats focals de les còniques

6 Classificació mètrica de les còniques

7 Introducció al disseny de corbes: corbes de Bézier

DESCRIPCIÓ D'UNA CORBA (I): FORMA EXPLÍCITA (2D)

$$\Gamma = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = F(x)\,, x \in I \subset \mathbb{R} \,\}$$

on $\begin{array}{rccc} F & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & F(x) \end{array}$ és una funció contínua.

- Exemples: $\{\, (x, y) \,|\, y = \sin x \,\}$
  $\{\, (x, y) \,|\, y = x^2 \,\}$

- Representació gràfica senzilla
- No totes les corbes admeten forma explícita

DESCRIPCIÓ D'UNA CORBA (II): FORMA IMPLÍCITA (2D)

$$\Gamma = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x,y) \in I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0 \,\}$$

on $\begin{array}{rccl} F : & I_1 \times I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & F(x,y) \end{array}$ és una funció contínua.

- Exemples: $\{\, (x,y) \,|\, x^2 + y^2 = R^2 \,\}$
  $\{\, (x,y) \,|\, \sin(xy) + \frac{x}{y} = 0 \,\}$

- Representació gràfica difícil
- És fàcil comprovar si un punt és de la corba
- Totes les corbes que admeten forma explícita, es poden representar de forma implícita

DESCRIPCIÓ D'UNA CORBA (III): FORMA PARAMÈTRICA (2D i 3D)

$$\Gamma = \{\, \gamma(t) \,|\, t \in I \subset \mathbb{R} \,\}$$

on $\gamma \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longrightarrow & \gamma(t) \end{array}$ és una funció contínua.

- Corbes 2D: $\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I \subset \mathbb{R}$
  Corbes 3D: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I \subset \mathbb{R}$

- Exemples. $\{A + t(B - A)|\, t \in [0,1]\,\}$, A, B punts de $\mathbb{R}^n$
  $\{(R\cos t, R\sin t)|t \in [0, 2\pi]\,\}$
  $\{(R\cos 2t, R\sin 2t)|t \in [0, \pi]\,\}$

- Representació gràfica senzilla
- La forma paramètrica d'una corba NO ÉS ÚNICA

FORMES DE DESCRIURE UNA CORBA (IV): FORMA POLAR (2D)

• Sistema de referència polar: punt O del pla (origen) i semirecta (eix) que comença a l'origen O
• Coordenades polars d'un punt P: $P = (r, \alpha)$, on $r > 0$ és la distància del punt P a l'origen O i $\alpha \in \mathbb{R}$ és l'angle orientat determinat per l'eix de coordenades polars i el vector $\overrightarrow{OP}$

• Descripció d'una corba: de forma explícita o implícita

$$\Gamma = \{(r, \alpha) | r = f(\alpha), \alpha \in I \subset \mathbb{R}, f \text{ contínua}\}$$

$$\Gamma = \{(r, \alpha) | f(r, \alpha) = 0, \alpha \in I, r \geq 0, f \text{ contínua}\}$$

• Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = r \cos \alpha \\ y(t) = r \sin \alpha \end{cases}$

• Exemples. Fixat $R > 0$, $\Gamma_R = \{(r, \alpha) | r = R, \alpha \in [0, 2\pi]\}$
Fixat $a > 0$, $\Gamma_a = \{(r, \alpha) | r = a\alpha, \alpha > 0\}$

FORMES DE DESCRIURE UNA CORBA (i V): INTERSECCIÓ DE SUPERFÍCIES (3D)

Algunes corbes es poden expressar com a intersecció de dues superfícies. Per exemple:

- Una recta és intersecció de dos plans

- La intersecció d'una esfera i un pla és una circumferència

- Una el.lipse es pot obtenir com a intersecció d'un cilindre i un pla

- Una hèlix es pot obtenir com a intersecció de dues superfícies sinusoidals

LA PARÀBOLA

Punts del pla que equidisten d'un punt (focus) i d'una recta (directriu) fixos

- Equació reduïda: $y = ax^2,\ a > 0$

S'obté si el focus és el punt $(0, \frac{1}{4a})$ i la recta directriu és $y = -\frac{1}{4a}$

- Notacions: $(0,0)$ és el *vèrtex* de la paràbola

- Forma paramètrica: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = at^2 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

L'EL.LIPSE

Punts del pla tals que la suma de les distàncies a dos punts fixats (focus) és constant

• Equació reduïda: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
S'obté si els focus són $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, la suma de les distàncies als focus és $2a$, i $b^2 = a^2 - c^2$

• Notacions: - semieixos de l'el.lipse: a, b
- centre: $(0, 0) = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$
- semidistància focal: c
- vèrtexs: $(a, 0)$, $(-a, 0)$

• Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

LA HIPÈRBOLA

Punts del pla tals que el valor absolut de la diferència de les distàncies a dos punts fixats (focus) és constant

- Equació reduïda: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

S'obté si els focus són $F_1 = (c, 0)$, $F_2 = (-c, 0)$, el valor absolut de la diferència de les distàncies als focus és $2a$, i $b^2 = c^2 - a^2$

- Notacions: - semieixos de la hipèrbola: a, b
  - centre: $(0, 0) = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$
  - asímptotes: $y = \pm\frac{b}{a}x$

- Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = a \sec t \\ y(t) = b \operatorname{tg} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

o bé: $\begin{cases} x(t) = \pm a \cosh t \\ y(t) = b \sinh t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

EQUACIÓ POLAR DE LES CÒNIQUES

Les còniques no degenerades segueixen una equació polar del tipus:

$$r = \frac{k}{1 - e\cos\alpha}$$

on $k, e > 0$ són constants. L'*excentricitat* de la corba és e.

- **Paràbola:** $e = 1$, $r = \dfrac{1/2a}{1 - \cos\alpha}$
- **El.lipse:** $e < 1$, $r = \dfrac{b^2/a}{1 - (c/a)\cos\alpha}$
- **Hipèrbola:** $e > 1$, $r = \dfrac{b^2/a}{1 - (c/a)\cos\alpha}$

ALTRES CORBES 2D I 3D (I)

• **Rodonea.** Fixat m real.

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = a\cos(mt)\cos t \\ y(t) = a\cos(mt)\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

Si m és parell: $2m$ pètals. Si m és senar: m pètals.

• **Cardioide.** Fixat a real positiu.

Equació polar: $r = a(1+\cos t),\ t \in [0, 2\pi]$

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = a(1+\cos t)\cos t \\ y(t) = a(1+\cos t)\sin t \end{cases},\ t \in [0, 2\pi]$

ALTRES CORBES 2D I 3D (II)

• **Espiral d'Arquímedes.** Fixat a real positiu.

Equació polar: $r = at,\ t \geq 0$

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \end{cases}, \ t \geq 0$

• **Espiral logarítmica.** Fixat a real.

Equació polar: $r = e^{at},\ t \in \mathbb{R}$

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = e^{at}\cos t \\ y(t) = e^{at}\sin t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

• **Espiral de Fermat.**

Equació polar: $r^2 = a^2 t$

ALTRES CORBES 2D I 3D (III)

• **Cicloide.** Corba que descriu un punt P fix d'una circumferència de radi R al rodar sobre una recta.

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad , \ t \geq 0$

• **Epicicloide.** Corba que descriu un punt P fixat d'una circumferència de radi r al rodar sobre una circumferència de radi R.

Equació paramètrica: $\begin{cases} x(t) = (R + r)\cos t - r\cos\frac{(R+r)t}{r} \\ y(t) = (R + r)\sin t - r\sin\frac{(R+r)t}{r} \end{cases} \quad , t \geq 0$

• **Variants.** Hipocicloides, trocoides, epitrocoides, hipotrocoides.

ALTRES CORBES 2D I 3D (i IV)

- **Hèlix circular.** Fixats $R > 0$ (radi), b real (pas de rosca).

Equació paramètrica: $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \\ z(t) = bt \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$

Dextrògira si $b > 0$, i *levògira* si $b < 0$.

- **Hèlix el.líptica.** Fixats $a, b > 0$, c real.

Equació paramètrica: $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \\ z(t) = ct \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$

- **Hèlix espiral.** Fixats $a > 0$, b real.

Equació paramètrica: $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = bt \end{array} \right. , \ t > 0$

VECTOR TANGENT I NORMAL A UNA CORBA (I)

Considerem la corba Γ donada en forma paramètrica, definida per una funció $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivable i tal que γ' no s'anul.la.

• El *vector tangent* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$ és $\gamma'(t_0)$.

• $T(t_0) = \gamma'(t_0)/\|\gamma'(t_0)\|$ és el *vector tangent unitari* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$.

• La *recta tangent* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$ és la recta que passa per $\gamma(t_0)$ i té vector director $\gamma'(t_0)$.

• Si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, llavors $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

VECTOR TANGENT I NORMAL A UNA CORBA (II)

Exemples

- Recta: $\gamma(t) = P + t\overrightarrow{u} \Rightarrow \gamma'(t) = \overrightarrow{u}$

- El.lipse: $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \Rightarrow \gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

- Hèlix circular: $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt) \Rightarrow \gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

- Espiral d'Arquímedes: $\gamma(t) = (at\cos t, at\sin t) \Rightarrow$
$\gamma'(t) = (a(\cos t - t\sin t), a(\sin t + t\cos t))$

- Cardioide: $\gamma(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t) \Rightarrow$
$\gamma'(t) = a(-\sin t - \sin(2t), \cos t + \cos(2t))$

VECTOR TANGENT I NORMAL A UNA CORBA (i III)

Considerem la corba Γ donada en forma paramètrica per una funció $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, i les funcions $T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$, la seva derivada $T'(t)$ i $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$.

• *Vector normal* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$: vector ortogonal al vector tangent en aquest punt.
• *Recta normal* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$: recta que passa per $\gamma(t_0)$ i té per vector director un vector normal a la corba en aquest punt.

• El vector $T'(t_0)$ és un vector normal a la corba en el punt $\gamma(t_0)$.
• El vector $N(t_0)$ és el *vector normal unitari (principal)* a la corba en el punt $\gamma(t_0)$.

PROPIETATS FOCALS DE LES CÒNIQUES

• **El.lipse.** Si s'emet un raig des d'un dels focus, l'el.lipse el reflexa cap a l'altre focus

• **Hipèrbola**. Si s'emet un raig cap a un focus, la hipèrbola el reflexa cap a l'altre focus.

• **Paràbola.** Si s'emet un raig paral.lel a l'eix de la paràbola (perpendicular a la directriu), la paràbola el reflexa cap al focus.

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES CÒNIQUES (I)

Cònica: corba del pla definida per una equació de segon grau.

Si en un sistema de referència cartesià té per equació:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

De quina corba es tracta? Farem canvis de sistemes de referència fins obtenir l'equació d'una corba coneguda.

Notació: si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
l'equació queda $X^T AX + BX + f = 0$

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES CÒNIQUES (II)

I) Eliminar el producte creuat "xy". Si $b \neq 0$, es diagonalitza la matriu A en base ortonormal:

-Calcular els valors propis de A

-Per a cada valor propi, buscar un vector propi i unitaritzar-lo

-Escriure l'equació en el sistema de referència que té com a base els vectors trobats anteriorment

II) Completar quadrats. Eliminem els termes lineals completant quadrats sempre que sigui possible. Equival a fer canvis d'origen.

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES CÒNIQUES (i III)

III) Identificar l'equació resultant.

-Si els valors propis de A són no nuls i tenen el mateix signe: el.lipse (cònica no degenerada), un punt o el conjunt buit

-Si els valors propis de A són no nuls i tenen diferent signe: hipèrbola(cònica no degenerada) o parell de rectes que es creuen

-Si un valor propi de A és nul: paràbola (cònica no degenerada), dues rectes paral.leles, una recta o el conjunt buit.

DISSENY DE CORBES: CORBES DE BÉZIER (I)

Considerem $P_0, P_1, \ldots P_n$, $n+1$ punts qualsevol de R^n (punts de control)
Poligonal de control: línia que s'obté unint successivament els punts $P_0, \ldots, P_n$.

- **Polinomis de Bernstein:**

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ 0 \leq i \leq n$$

- **Corba de Bezier:** $B(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i,\ t \in [0,1]$

DISSENY DE CORBES: CORBES DE BÉZIER (II)

Propietats de les corbes de Bézier

• El grau del polinomi que defineix la corba de Bézier és n (nombre de punts menys 1).

• La corba comença a $P_0 = B(0)$ i acaba a $P_n = B(1)$.

• El vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ és tangent a la corba en el punt $P_0 = B(0)$; el vector $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ és tangent a la corba en el punt $P_n = B(1)$.

• La corba està continguda dins l'envolupant convexa dels punts de control i *segueix* la poligonal de control.

DISSENY DE CORBES: CORBES DE BÉZIER (i III)

Propietats de les corbes de Bézier (cont.)

• La modificació d'un dels punts de control afecta a tota la corba de Bézier.

• El nombre de talls d'una recta qualsevol i la corba de Bézier és com a màxim el nombre de talls de la recta i la poligonal de control.

• Les corbes de Bézier són invariants per transformacions afins. No ho són per perspectives.

SUPERFÍCIES

1 Formes de descriure una superfície

2 Esfera, cilindre, con

3 Superfícies de revolució

4 Vector normal i pla tangent

5 Classificació mètrica de les quàdriques

6 Intersecció de superfícies. Cilindre projectant

DESCRIPCIÓ D'UNA SUPERFÍCIE (I): FORMA EXPLÍCITA

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = F(x,y),\, x \in I_1 \subset \mathbb{R},\, y \in I_2 \subset \mathbb{R}\}$$

on $\begin{array}{lllll} F & : & I_1 \times I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longrightarrow & F(x,y) \end{array}$ és una funció contínua.

- Exemples: $\{\, (x,y,z) \,|\, z = \sin(xy) \,\}$
  $\{\, (x,y,z) \,|\, z = x^2 + y^2 \,\}$

- Representació gràfica senzilla
- No totes les superfícies admeten forma explícita

DESCRIPCIÓ D'UNA SUPERFÍCIE (II): FORMA IMPLÍCITA

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \subset \mathbb{R}^3,\; F(x, y, z) = 0 \,\}$$

on $\begin{array}{rccl} F : & I_1 \times I_2 \times I_3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & F(x, y, z) \end{array}$ és una funció contínua.

- Exemples: $\{\, (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \,\}$
  $\{\, (x, y, z) \,|\, \sin(xyz) + \log(xy/z) = 0 \,\}$

- Representació gràfica difícil
- És fàcil comprovar si un punt és de la superfície
- Totes les superfícies que admeten forma explícita, es poden representar de forma implícita

DESCRIPCIÓ D'UNA SUPERFÍCIE (III): FORMA PARAMÈTRICA

$$\Gamma = \{\, \gamma(t,s) \,|\, t \in I_1 \subset \mathbb{R},\ s \in I_2 \subset \mathbb{R}\}$$

on $\gamma \ : \ \begin{array}{ccc} I_1 \times I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (t,s) & \longrightarrow & \gamma(t,s) \end{array}$ és una funció contínua.

- Observació: $\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)),\ t \in I_1,\ s \in I_2$
- Exemples. $\{P + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \,|\, t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}\}$,
  on P és un punt de $\mathbb{R}^3$ i u, v són vectors de $\mathbb{R}^3$
  $\{(R\cos t \sin s, R\sin t \sin s, R\cos s) | t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi]\}$
  $\{(t^2 - st, s^2 + s + t) | t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}\}$

- Representació gràfica senzilla
- La forma paramètrica d'una superfície NO ÉS ÚNICA

L'ESFERA

Esfera de centre C i radi R: punts de l'espai a distància R de C

- Si el centre és $C = (0,0,0)$:

Equació cartesiana: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Equació paramètrica:

$$\begin{cases} x(t,s) = R \sin s \cos t \\ y(t,s) = R \sin s \sin t \\ z(t,s) = R \cos s \end{cases}, \quad \begin{array}{l} t \in [0, 2\pi] \text{ (longitud)} \\ s \in [0, \pi] \text{ (colatitud)} \end{array}$$

o bé:

$$\begin{cases} x(t,s) = R \cos s \cos t \\ y(t,s) = R \cos s \sin t \\ z(t,s) = R \sin s \end{cases}, \quad \begin{array}{l} t \in [0, 2\pi] \text{ (longitud)} \\ s \in [-\pi/2, \pi/2] \text{ (latitud)} \end{array}$$

• Si el centre és $C = (x_0, y_0, z_0)$:

Equació cartesiana: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Equació paramètrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t,s) = x_0 + R\sin s \cos t \\ y(t,s) = y_0 + R\sin s \sin t \\ z(t,s) = z_0 + R\cos s \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi]$$

o bé:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t,s) = x_0 + R\cos s \cos t \\ y(t,s) = y_0 + R\cos s \sin t \\ z(t,s) = z_0 + R\sin s \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi],\ s \in [-\pi/2, \pi/2]$$

EL CILINDRE (I)

Cilindre circular recte d'eix la recta e i radi $R > 0$: superfície formada per tots els punts que disten R de la recta e

- Si l'eix és la recta $x = y = 0$(eix OZ):

Equació cartesiana: $x^2 + y^2 = R^2$

Equació paramètrica:

$$\begin{cases} x(t,s) = R\cos t \\ y(t,s) = R\sin t \quad , \quad t \in [0, 2\pi],\, s \in \mathbb{R} \\ z(t,s) = s \end{cases}$$

EL CILINDRE (II): ALTRES CILINDRES

Cilindre d'eix la recta e i corba directriu Γ: superfície generada per les rectes paral.leles a e que passen per un punt de la corba Γ

Equació. Si l'eix és OZ i Γ és una corba del pla XY.
• Si Γ està donada per una equació explícita, $y = f(x)$, llavors el cilindre és $S = \{(x, y, z) | y = f(x)\}$.
• Si Γ està donada per una equació implícita, $F(x, y) = 0$, llavors el cilindre és $S = \{(x, y, z) | F(x, y) = 0\}$.
• Si Γ està donada per una equació paramètrica, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ llavors el cilindre té equació paramètrica $S(t, s) = (x(t), y(t), s)$, $t \in I, s \in \mathbb{R}$.

EL CILINDRE (i III): ALTRES CILINDRES

EXEMPLE: CILINDRE EL.LÍPTIC

La corba directriu és una el.lipse

- Si l'el.lipse és del pla XY i té equació reduïda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

Equació cartesiana: $S = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

Equació paramètrica:

$$\begin{cases} x(t,s) = a\cos t \\ y(t,s) = b\sin t \\ z(t,s) = s \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], s \in \mathbb{R}$$

EL CON

Con circular recte de vèrtex V, eix la recta e i angle α: superfície generada per les rectes que passen per V i formen un angle α amb la recta e

- Si $V = (0,0,0)$ i e és l'eix OZ.

Equació reduïda: $x^2 + y^2 = (\mathrm{tg}\alpha)^2 z^2$

Equació paramètrica:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t,s) = s \sin\alpha \cos t \\ y(t,s) = s \sin\alpha \sin t \\ z(t,s) = \pm s \cos\alpha \end{array}\right. , \ t \in [0, 2\pi],\ s \geq 0$$

o bé:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t,s) = s\ \mathrm{tg}\alpha \cos t \\ y(t,s) = s\ \mathrm{tg}\alpha \sin t \\ z(t,s) = \pm s \end{array}\right. , \ t \in [0, 2\pi],\ s \geq 0$$

COORDENADES ESFÈRIQUES I CILÍNDRIQUES

Coordenades cartesianes: $(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}$

Coordenades esfèriques: (r, θ, ϕ)

on:

$x = r \sin\phi \cos\theta, y = r \sin\phi \sin\theta, z = r \cos\phi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, $\phi = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Coordenades cilíndriques: (r, θ, z)

on:

$x = r \cos\theta, y = r \sin\theta, z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, $z = z$

SUPERFÍCIES DE REVOLUCIÓ (I)

Superfície de revolució d'eix la recta e i corba directriu Γ: superfície que s'obté al girar la corba Γ al voltant de l'eix e

• **Exemples.**
-Cilindre circular recte: Γ és una recta paral.lela a l'eix de rev.
-Con circular recte: Γ és una recta que talla l'eix de revolució.
-Esfera: Γ és una semicircumferència i l'eix passa pels seus extrems.

• Al tallar una superfície de revolució per plans perpendiculars a l'eix, s'obtenen circumferències

• Al tallar una superfície de revolució per plans que contenen l'eix de revolució s'obtenen còpies d'una mateixa corba (coincideix amb la corba directriu si està continguda a un pla que conté l'eix).

SUPERFÍCIES DE REVOLUCIÓ (II)

• **Equació.**

-Si l'eix de revolució és OZ, Γ està continguda al pla XZ i coneixem una parametrització de Γ, $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, $t \in I$, una parametrització de la superfície de revolució és

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t,s) = x(t)\cos s \\ y(t,s) = x(t)\sin s \\ z(t,s) = z(t) \end{array} \right. , \ t \in I, \ s \in [0, 2\pi]$$

-Si l'eix de revolució és OZ, i coneixem una parametrització de Γ, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$, una parametrització de la superfície de revolució és

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t,s) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\cos s \\ y(t,s) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\sin s \\ z(t,s) = z(t) \end{array} \right. , \ t \in I, \ s \in [0, 2\pi]$$

SUPERFÍCIES DE REVOLUCIÓ (i III)

EL TOR: superfície de revolució obtinguda quan Γ és una circumferència i l'eix e és una recta situada al mateix pla que la circumferència i no la talla.

Parametrització del tor tal que:
-Eix de revolució: OZ
-Circumferència directriu: radi r, centre $(R, 0, 0)$, situada al pla XZ

Parametrització:

$$\begin{cases} S_x(t,s) = (r\cos t + R)\cos s \\ S_y(t,s) = (r\cos t + R)\sin s \quad , \; t \in [0, 2\pi],\, s \in [0, 2\pi] \\ S_z(t,s) = r\sin t \end{cases}$$

VECTOR NORMAL I PLA TANGENT (I)

Considerem la superfície S donada en forma paramètrica per la funció $S : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$

• Si S es pot derivar respecte a t i s, tenim:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right) \qquad \frac{\partial S}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right) \qquad \overrightarrow{N} = \frac{\partial S}{\partial t} \wedge \frac{\partial S}{\partial s}$$

• El vector $\overrightarrow{N}$ s'anomena producte vectorial fonamental de la parametrització S.
• $\overrightarrow{N}$ és el vector normal a la superfície en els punts regulars
• El pla tangent a la superfície S en el punt $S(t_0, s_0)$ és el pla que passa per $S(t_0, s_0)$ i té vector normal $\overrightarrow{N}(t_0, s_0)$

• Diferents parametritzacions de una mateixa superfície donen lloc, si existeixen, a vectors normals proporcionals

VECTOR NORMAL I PLA TANGENT (II): Exemples

1.a Semiesfera unitat:

$S(t,s) = (\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)\,, t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, \pi/2]$

$\frac{\partial S}{\partial t} = (-\cos s \sin t, \cos s \cos t, 0) \qquad \frac{\partial S}{\partial s} = (-\cos t \sin s, -\sin s \sin t, \cos s)$

$\overrightarrow{N} = \frac{\partial S}{\partial t} \wedge \frac{\partial S}{\partial s} = \left(\cos^2 s \cos t, \cos^2 s \sin t, \sin s \cos s\right) = \cos s\, S(t,s)$

- No existeix al pol nord: per a $s = \pi/2$, $\overrightarrow{N}$ s'anul.la
- Existeix als punts de l'equador: $S(\alpha, 0) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) = \overrightarrow{N}(\alpha, 0)$
- En el punt $P = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$: $S(\pi/2, \pi/4) = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $N(\pi/2, \pi/4) = (0, 1/2, 1/2)$

VECTOR NORMAL I PLA TANGENT (III): Exemples

1.b Semiesfera unitat:

$$S(x,y) = \left(x, y, +\sqrt{1-x^2-y^2}\right), \quad x, y \in [-1,1], \; x^2+y^2 \leq 1$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial S}{\partial x} \wedge \frac{\partial S}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$$

- No existeix als punts de l'equador: $x^2+y^2=1$
- Existeix al pol nord: per a $x=y=0$, $S(0,0)=(0,0,1)$ i $\overrightarrow{N}(0,0)=(0,0,1)$
- En el punt $P=(0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$: per a $x=0, y=\sqrt{2}/2$, $S(0,\sqrt{2}/2)=(0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ i $\overrightarrow{N}(0,\sqrt{2}/2)=(0,1,1)$

VECTOR NORMAL I PLA TANGENT (i IV): Exemples

2. Paraboloide hiperbòlic:

$$S(t,s) = \left(t, s, \frac{t^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(1, 0, \frac{2t}{a^2}\right) \qquad \frac{\partial S}{\partial s} = \left(0, 1, -\frac{2s}{b^2}\right)$$

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial S}{\partial t} \wedge \frac{\partial S}{\partial s} = \left(-\frac{2t}{a^2}, \frac{2s}{b^2}, 1\right)$$

- En el punt $S(0,0) = (0,0,0)$: $\overrightarrow{N}(0,0) = (0,0,1)$
- En el punt $S(a,b) = (a,b,0)$: $\overrightarrow{N}(a,b) = (-2/a, 2/b, 1)$
- En el punt $S(a,0) = (a,0,1)$: $\overrightarrow{N}(a,0) = (-2/a, 0, 1)$

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES QUÀDRIQUES (I)

Quàdrica: superfície de l'espai definida per una equació de segon grau

Si en un sistema de referència cartesià té per equació:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

De quina superfície es tracta? Farem canvis de sistemes de referència fins obtenir l'equació d'una superfície coneguda.

Notació:

si $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

l'equació queda $X^T M X + NX + a_{44} = 0$

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES QUÀDRIQUES (II)

I) Eliminar els productes creuats "xy", "xz","yz".
Diagonalitzar la matriu M en base ortonormal:

-Calcular els valors propis de M

-Per a cada valor propi, buscar una base de vectors propis i oronormalitzar-la

-Escriure l'equació en el sistema de referència que té com a base la unió de les bases de vectors propis trobades anteriorment

II) Completar quadrats. Eliminem els termes lineals completant quadrats sempre que sigui possible. Equival a fer canvis d'origen.

CLASSIFICACIÓ MÈTRICA DE LES QUÀDRIQUES (i III)

III) Identificar l'equació resultant.

Fent canvis de base o d'origen es pot aconseguir que:
-Com a molt hi hagi un terme lineal
-Si hi ha terme lineal, el terme independent sigui 0
-Els termes independents no nuls valguin 1

Les superfícies que s'obtenen són:
-Si tots els valors propis de M són no nuls: el.lipsoide, hiperboloide d'un full, hiperboloide de dos fulls, con, un punt o el conjunt buit
-Si 0 és valor propi de M de multiplicitat 1: paraboloide el.líptic, paraboloide hiperbòlic, cilindre el.líptic, cilindre hiperbòlic, el conjunt buit, una recta o un parell de plans que es tallen
-Si 0 és valor propi de M de multiplicitat 2: cilindre parabòlic, dos plans paral.lels, una recta o el conjunt buit.

INTERSECCIÓ DE SUPERFÍCIES. CILINDRE PROJECTANT. (I)

- La intersecció de dues superfícies és en general una corba
- Algunes corbes s'expressen com a intersecció de superfícies

Cilindre projectant C_z (C_y, C_x resp.) d'una corba Γ sobre el pla $z = 0$($y = 0$, $x = 0$ resp.): cilindre d'eix OZ(OY, OX resp.) que conté la corba Γ

- El cilindre projectant és útil per a trobar la corba intersecció de dues superfícies i per a expressar una corba com a intersecció de dues superfícies

INTERSECCIÓ DE SUPERFÍCIES. CILINDRE PROJECTANT. (II)

Càlcul del cilindre projectant C_z de la corba $\Gamma = S_1 \cap S_2$:

• $S_1 = \{(x,y,z)|F_1(x,y,z)=0\}, \quad S_2 = \{(x,y,z)|F_2(x,y,z)=0\}$

• Aïllar, si és possible, z d'una equació i substituïr-la a l'altra:
p.e. $F_1(x,y,z)=0 \Rightarrow z = f_1(x,y) \Rightarrow F_2(x,y,f_1(x,y))=0$

• S'obté un cilindre d'eix OZ, $C_z = \{(x,y,z)|F(x,y)=0\}$, on $F(x,y) = F_2(x,y,f_1(x,y))$

• C_z conté la corba Γ

• La projecció de Γ sobre el pla $z=0$ és la corba $Pr_{z=0}(\Gamma) = \{(x,y,z)|F(x,y)=0, z=0\}$

• Γ s'obté a partir de la projecció, calculant l'"altura" z de cada punt

INTERSECCIÓ DE SUPERFÍCIES. CILINDRE PROJECTANT. (III)

1. La intersecció d'una quàdrica amb un pla és una cònica. En particular, la intersecció d'un con i un pla és una cònica.

2. La intersecció d'un cilindre circular recte amb un pla que talla l'eix del cilindre és una circumferència si, i només si, el pla és perpendicular a l'eix

3. La intersecció d'una esfera i un pla és una circumferència ó un punt ó el conjunt buit

4. La intersecció de dues esferes és una circumferència

5. Qué és la intersecció de dos cilindres circulars rectes del mateix radi i eixos perpendiculars que es tallen?

6. Qué és la intersecció d'un prisma hexagonal i un con amb eixos coincidents?