Geometria Computacional

Facultat d'Informàtica de Barcelona. UPC.

Transparències: Afinitats

Mercè Mora

Curs 2002-2003/Q2

AFINITATS

1 Afinitats

2 Equació d'una afinitat

3 Propietats

4 Exemples

5 Propietats: afinitats i varietats lineals

6 Desplaçaments

7 Desplaçaments 2D

8 Desplaçaments 3D

1. AFINITATS

Una *afinitat* a un espai afí (E, V) de dimensió n és una aplicació $f : E \longrightarrow E$ tal que existeix una aplicació lineal $\phi : V \longrightarrow V$ que satisfà $\forall p \in E, \forall u \in V,\ f(p+u) = f(p) + \phi(u)$

Observacions:

- $\forall p \in E, \forall u \in V,\ f(p+u) = f(p) + \phi(u) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall p, q \in E,\ \overrightarrow{f(p)f(q)} = \phi(\overrightarrow{pq})$

- f queda determinada per ϕ i la imatge per f d'un punt qualsevol

2. AFINITATS: EQUACIONS (I)

Fixem un sistema de referència de E, $S = (O, \{e_1, \dots, e_n\})$, f queda determinada per $f(O)$ (vector translació) i ϕ (aplicació lineal associada a f)

Si $f(O) = W = (w_1, \dots w_n)$ i A és la matriu associada a l'aplicació lineal ϕ respecte a la base $\{e_1, \dots, e_n\}$) (és a dir, conté per columnes les imatges dels vectors $e_1, \dots e_n$), llavors l'afinitat es pot expressar:

- $f(X) = AX + W$
- $\begin{pmatrix} f(X) \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & W \\ - & - & - & - \\ & 0 & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$

2. AFINITATS: EQUACIONS (i II)

- Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(X) = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + w_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + w_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + w_n \end{array} \right.$$

3. PROPIETATS (I)

- f, g afinitats $\Rightarrow$ $f \circ g$ afinitat

- La composició d'afinitats no és en general commutativa:
  $f \circ g \neq g \circ f$

- f té M per matriu ampliada i g té N per matriu ampliada $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ $f \circ g$ té MN per matriu ampliada

- $f(X) = AX + W$, $g(X) = BX + V \;\; \Rightarrow$
  $\Rightarrow (f \circ g)(X) = (AB)X + (AV + W)$

3. PROPIETATS (i II)

- f afinitat bijectiva (o regular) $\Leftrightarrow$ ϕ aplicació lineal bijectiva $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ A és inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$,
on A és la matriu associada a ϕ

- Si f és una afinitat bijectiva i té matriu ampliada M, llavors f^{-1} és una afinitat i té per matriu ampliada M^{-1}

- Si $x_1, \ldots, x_{n+1}$ són $n+1$ punts linealment independents de E (és a dir, els vectors $\overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_1x_3}, \ldots \overrightarrow{x_1x_{n+1}}$ són l.i.) i
$y_1, \ldots,\ y_{n+1}$ són $n+1$ punts qualsevol d'un espai afí E de dimensió n, existeix una única afinitat f tal que
$f(x_i) = y_i\,,\ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$

4. EXEMPLES (I)

1. Translacions de vector W.
Són afinitats tals que $\phi = Id$ $(A = I)$:
$t_W : E \to E, \ \ t_W(X) = X + W$
- Són afinitats regulars i la inversa és $t_W^{-1} = t_{-W}$
- La composició de translacions és una translació: $t_U \circ t_W = t_{U+W}$

2. Canvi d'escala respecte l'origen.
Afinitat tal que $W = 0$ i A és diagonal:
$E^0_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}(x_1, \dots x_n) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$
- $E^0_{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n}$ és regular $\Leftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ s'anomena *homotècia* de raó λ

4. EXEMPLES (i II)

3. Projecció paral.lela. La projecció sobre el pla $z = 0$ paral.lela a $u = (u_1, u_2, u_3)$ a l'espai afí $\mathbb{R}^3$ fa correspondre al punt X la intersecció del pla $z = 0$ i la recta que passa per X i té vector director u.

Equacions: $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_1/u_3 \\ 0 & 1 & -u_2/u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$

- És una afinitat no regular
- $f^2 = f$

5. PROPIETATS: AFINITATS I VARIETATS LINEALS

• Les afinitats transformen varietats lineals en varietats lineals

• Les afinitats transformen varietats lineals paral.leles en varietats lineals paral.leles

• Les afinitats transformen punts alineats (coplanaris) en punts alineats (coplanaris)

• Les afinitats transformen segments en segments

• En general, les afinitats no conserven distàncies, normes, producte escalar, angles, orientació

6. DESPLAÇAMENTS (I)

Són les afinitats $f : E \to E$ que conserven distàncies, és a dir, $d(f(p), f(q)) = d(p, q), \ \forall p, q \in E$

1. Si f és una afinitat i ϕ l'aplicació lineal associada,

• Són equivalents les condicions següents:
-f és un desplaçament
-ϕ conserva normes
-ϕ conserva el producte escalar
-ϕ transforma bases ortonormals en bases ortonormals

• f desplaçament $\Rightarrow$ ϕ conserva angles

6. DESPLAÇAMENTS (i II)

2. Si f és una afinitat i ϕ és l'aplicació lineal associada que té A per matriu associada respecte a una base ortonormal,

- f és un desplaçament $\Leftrightarrow$ A és una matriu ortogonal ($A^T = A^{-1}$)

- f és un desplaçament $\Rightarrow$ $\det A = \pm 1$ i f és regular

7. DESPLAÇAMENTS 2D

Afinitats $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tals que $\forall p, q \in \mathbb{R}^2,\ d(p,q) = d(f(p), f(q))$

- $f(X) = AX + W$ és un desplaçament $\Leftrightarrow$ A és un matriu ortogonal

- Desplaçaments directes: $\det A = 1$
  Desplaçaments inversos: $\det A = -1$

DESPLAÇAMENTS 2D DIRECTES

$$\det A = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [-\pi, \pi],\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Identitat} \\ \text{Translacions} \\ \text{Rotacions} \end{cases}$$

f(X)=AX+W	$\alpha = 0$	$\alpha \neq 0$
$W = \overrightarrow{0}$	I	R_α^O
$W \neq \overrightarrow{0}$	t_W	$t_W \circ R_\alpha^O = R_\alpha^C$, on $C = (I - A)^{-1} W$

DESPLAÇAMENTS 2D INVERSOS

$\det A = -1 \Rightarrow \exists$ sist. de ref. S' tq. $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Simetria axial} \\ \\ \text{Simetria axial seguida de} \\ \quad \text{translació de vector paral.lel a l'eix de simetria} \end{cases}$$

$W = \overrightarrow{0}$	S_{OX}
$W = (w_1, w_2) \neq \overrightarrow{0}$	$t_W \circ S_{OX} = t_v \circ S_e$ on $e : y = \frac{1}{2}w_2,\ v = (w_1, 0)$

EQUACIÓ D'UNA ROTACIÓ QUALSEVOL

Rotació d'angle α i centre C, R_α^C:

$$R_\alpha^C = T_C \circ R_\alpha^O \circ T_{-C}$$

EQUACIÓ D'UNA SIMETRIA AXIAL QUALSEVOL

Simetria axial d'eix e que passa pel punt P i forma un angle α amb l'eix d'abscisses, S_e:

$$S_e = T_P \circ R_\alpha^O \circ S_{OX} \circ R_{-\alpha}^O \circ T_{-P}$$

DESPLAÇAMENTS 3D

DESPLAÇAMENTS 3D DIRECTES

$f(X) = AX + W$, A ortogonal, $\det A = 1$

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{Identitat} \\ &\text{Translacions} \\ &\text{Rotació d'eix } e \text{ i angle } \alpha \\ &\text{Rotació seguida de translació paral.lela a l'eix de rotació} \end{aligned} \right.$$

DESPLAÇAMENTS 3D INVERSOS

$f(X) = AX + W$, A ortogonal, $\det A = -1$

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{Simetria central} \\ &\text{Simetria especular} \\ &\text{Simetria esp. seguida de rotació d'eix perp. al pla de simetria} \\ &\text{Simetria esp. seguida de translació paral.lela al pla de simetria} \end{aligned} \right.$$

EQUACIONS DELS DESPLAÇAMENTS 3D

- **Matriu ampliada d'una afinitat:** $\begin{pmatrix} f(X) \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Desplaçaments elementals.**

$$\text{Despl. directes} \begin{cases} \text{Identitat} \\ \text{Translacions} \\ \text{Rotacions d'eixos de coordenades } OX,\ OY \text{ i } OZ \end{cases}$$

$$\text{Despl. inversos} \begin{cases} \text{Simetria central respecte a l'origen} \\ \text{Simetria especular de plans de coord. } XY,\ XZ \text{ i } YZ \end{cases}$$

- **Altres.** Deduïr la matriu ampliada amb algún dels mètodes següents:

$$\begin{cases} \text{1. Composició d'afinitats elementals} \\ \text{2. Canvis de sistemes de referència} \\ \text{3. Propietats de l'afinitat} \end{cases}$$

MATRIU AMPLIADA DELS DESPL. ELEMENTALS

IDENTITAT, I:

$$M_I = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TRANSLACIÓ DE VECTOR W, T_W:

$$W = (w_1, w_2, w_3) \Rightarrow M_{T_W} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ROTACIÓ D'ANGLE α i EIX OX, R_α^{OX}:

$$M_{R_\alpha^{OX}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ROTACIÓ D'ANGLE α i EIX OY, R_α^{OY}:

$$M_{R_\alpha^{OY}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ROTACIÓ D'ANGLE α i EIX OZ, R_α^{OZ}:

$$M_{R_\alpha^{OZ}} = \left(\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SIMETRIA ESPECULAR DE PLA $XY\,(z=0)$, S_{XY} :

$$M_{S_{XY}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SIMETRIA ESPECULAR DE PLA $XZ\,(y=0)$, S_{XZ} :

$$M_{S_{XZ}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SIMETRIA ESPECULAR DE PLA $YZ\,(x=0)$, S_{YZ} :

$$M_{S_{YZ}} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

SIMETRIA CENTRAL RESP. L'ORIGEN, S_O:

$$M_{S_O} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

MATRIU AMPLIADA D'ALTRES DESPLAÇAMENTS

ORIENTACIÓ D'UN EIX DE ROTACIÓ

• Orientar una recta e (eix de rotació) consisteix en donar un vector director de la recta, v.

• Un cop orientat l'eix e, la rotació d'angle α respecte l'eix e consisteix en fer un gir d'angle α en sentit antihorari si mirem els punts des de l'infinit on apunta el vector v.

• Per defecte, orientarem una recta prenent el vector director $v = (v_1, v_2, v_3)$ tal que,
$v_3 > 0$ o bé
$v_3 = 0$ i $v_2 > 0$, o bé
$v_3 = v_2 = 0$ i $v_1 > 0$

MÈTODE DE FOLEY-VAN DAM

Considerem $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vector no nul de $\mathbb{R}^3$,
¿ angles β i γ tals que $(R_\gamma^{OX} \circ R_\beta^{OZ})(u) = (0, 0, h),\ h > 0$?

- Si $u_1 = u_2 = 0$: $\begin{cases} \beta = \gamma = 0, & \text{si } u_3 > 0\ , \\ \beta = 0, \gamma = \pi, & \text{si } u_3 < 0. \end{cases}$

- Si $u_1 \neq 0$ ó $u_2 \neq 0$:

$$\beta = \mathrm{sgn}(u_1) \arccos \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \\ \sin\beta = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \end{cases}$$

$$\gamma = \arccos \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos\gamma = \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}} \\ \sin\gamma = \frac{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}} \end{cases}$$

EXEMPLE MÈTODE 1: ROTACIÓ D'EIX e I ANGLE α

Si e passa pel punt P i té vector director orientat v, i β i γ els angles que s'obtenen al aplicar Foley-Van Dam a v:

$$R_\alpha^e = T_P \circ R_{-\beta}^{OZ} \circ R_{-\gamma}^{OX} \circ R_\alpha^{OZ} \circ R_\gamma^{OX} \circ R_\beta^{OZ} \circ T_{-P}$$

EXEMPLE MÈTODE 1: SIMETRIA ESPECULAR DE PLA Π

Si el pla Π passa pel punt P i té vector normal v, i β i γ els angles que s'obtenen al aplicar Foley-Van Dam a v:

$$S_\Pi = T_P \circ R_{-\beta}^{OZ} \circ R_{-\gamma}^{OX} \circ S_{XY} \circ R_\gamma^{OX} \circ R_\beta^{OZ} \circ T_{-P}$$

EXEMPLE MÈTODE 2:
SIMETRIA ESPECULAR DE PLA Π

Si el pla Π passa pel punt P i té vector normal $v = (a, b, c)$, prenem el sistema de referència ortonormal $S' = (O', \{e'_1, e'_2, e'_3\})$, on $O' = P$, $e'_3 = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $e'_1 = (-b, a, 0)/\sqrt{a^2 + b^2}$, $e'_2 = e'_3 \wedge e'_1$. Considerem la matriu ampliada del canvi de sistema de referència, $M_{A,W}$.

$$Q \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} X & \text{coordenades resp. } S \\ X' & \text{coordenades resp. } S' \end{cases}$$

$$S_\Pi(Q) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} Y & \text{coordenades resp. } S \\ Y' & \text{coordenades resp. } S' \end{cases}$$

$$X = AX' + W \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = AY' + W \Rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} \begin{pmatrix} Y' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y' = S_{\{z'=0\}}(X') \Rightarrow \begin{pmatrix} Y' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{S_{XY}} \begin{pmatrix} X' \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = S_\Pi(X) \Rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{S_\Pi} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \textcolor{red}{M_{S_\Pi}??}$$

Substituim X', Y' en funció de X, Y:

$$M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{S_{XY}} M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Y \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W} M_{S_{XY}} M_{A,W}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ - \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriu ampliada de la simetria:

$$M_{S_\Pi} = M_{A,W} M_{S_{XY}} M_{A,W}^{-1}$$

EXEMPLE MÈTODE 3: SIMETRIA CENTRAL

Si $S_P(X)$ és la imatge del punt X per una simetria central respecte a un punt P, es satisfà que P és el punt mitjà del segment $\overline{XS_P(X)}$, d'on es dedueix:

$$P = \frac{1}{2}(X + S_P(X)) \Rightarrow S_P(X) = -X + 2P$$

i per tant, la matriu ampliada de la simetria central respecte al punt $P = (p_1, p_2, p_3)$ és

$$M_{S_P} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2p_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2p_2 \\ 0 & 0 & -1 & 2p_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$