ÀLGEBRA

Resums de la segona part

Mercè Mora

Facultat d'Informàtica de Barcelona. UPC.

Curs 2006-2007/Q1

---

1. ESPAIS VECTORIALS REALS

Espai vectorial

Subespai vectorial.

Subespai generat. Combinacions lineals

Dependència i independència lineal

Bases i dimensió. Components

Canvis de base

1. ESPAIS VECTORIALS (I)

V és un *espai vectorial real* (o bé un *espai vectorial sobre* $\mathbb{R}$ o bé un $\mathbb{R}$-*espai vectorial*) si V és un conjunt i $+$, $\cdot$ operacions tals que:

$+ : V \times V \to V$ (operació binària interna en V)

- $\forall u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa)
- $\forall u, v \in V$, $u + v = v + u$ (commutativa)
- $\exists \overrightarrow{0} \in V$ tal que $\forall u \in V$, $\overrightarrow{0} + u = u + \overrightarrow{0} = u$
  ($\overrightarrow{0}$ és l'*element neutre* de V)
- $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = \overrightarrow{0}$
  ($-u$ és l'element *simètric* o *oposat* de u)

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (operació externa)

- $\forall u \in V$, $1 \cdot u = u$
- $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
- $\forall u \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

1. ESPAIS VECTORIALS (II)

$\triangleright$ Els elements d'un espai vectorial real V s'anomenen *vectors* i els elements de $\mathbb{R}$, *escalars*

$\triangleright$ Per definir un $\mathbb{R}$-espai vectorial calen 4 operacions:

Suma de vectors
Suma d'escalars (suma de nombres reals)
Producte de vector per escalar
Producte d'escalars (producte de nombres reals)

$\triangleright$ Normalment utilitzem la mateixa notació $+$ per a les dues sumes, tot i que són dues operacions diferents, i la mateixa notació $\cdot$ (o res) per als dos productes, tot i que són dues operacions diferents. Sabem de quina es tracta pel context.

1. ESPAIS VECTORIALS (III)

▶ Si V és un $\mathbb{R}$-espai vectorial,
$\forall u \in V$, $0 \cdot u = \overrightarrow{0}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$, $(\alpha \cdot u = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ó $u = \overrightarrow{0})$
$\forall u \in V$, $(-1) \cdot u = -u$

▷ Exemples.
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$
$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ conjunt de matrius $m \times n$ amb coeficients reals
$\mathbb{R}[x]$, conjunt de polinomis amb coeficients reals
$\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, conjunt de funcions reals

1. ESPAIS VECTORIALS (IV). SUBESPAIS

Si V és un espai vectorial real,

• $W \subseteq V$ és *subespai vectorial* de V si W és un espai vectorial real amb les operacions de V induïdes a W (és a dir, les operacions de V considerades només per als vectors de W).

▶ $W \subseteq V$ és un subespai vectorial de V si es compleixen les condicions següents:

$$W \neq \varnothing$$
$$\forall u, v \in W,\ u + v \in W$$
$$\forall u \in W,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot u \in W$$

▶ Un subespai vectorial no pot ser buit, com a mínim conté el vector $\overrightarrow{0}$.

1. ESPAIS VECTORIALS (V). SUBESPAI GENERAT

Si V és un espai vectorial real,

• El *subespai vectorial generat* per $S \subseteq V$ és el subespai vectorial més petit (respecte a la inclusió) de tots els que contenen S.

▷ Notació: $\langle S \rangle$ denota el subespai vectorial generat per S.

▶ $\langle \varnothing \rangle = \{ \overrightarrow{0} \}$
▶ Si $S \neq \varnothing$,
$\langle S \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r \mid r \geq 1;\ \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in S,\ \text{si } 1 \leq i \leq r \}$
▶ $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ \text{si } 1 \leq i \leq k \}$

• *Combinació lineal* dels vectors $u_1, \ldots, u_k \in V$: qualsevol vector de la forma $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, on $\forall i$, $1 \leq i \leq k$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$

▶ Si $S \neq \varnothing$, $\langle S \rangle$ està format per totes les combinacions lineals de vectors de S.

1. ESPAIS VECTORIALS (VI). INDEPENDÈNCIA LIN.

Si V és un espai vectorial real,

• $S \subseteq V$ és *linealment independent* $\Leftrightarrow$ $(u_1, \ldots, u_r \in S,$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0)$

• $S \subseteq V$ és *linealment dependent* $\Leftrightarrow$ S no és linealment independent

• Cas particular: $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ és linealment independent $\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0)$

▶ S linealment independent $\Rightarrow \overrightarrow{0} \notin S$
▶ S linealment independent, $S' \subseteq S$ $\Rightarrow S'$ és linealment independent
▶ S linealment dependent $\Rightarrow \exists v \in S$ tal que v és combinació lineal de vectors de $S \setminus \{v\}$

1. ESPAIS VECTORIALS (VII). BASES I DIMENSIÓ

Si V és un espai vectorial real,

• $B \subseteq V$ és una *base* de $V \Leftrightarrow \begin{cases} \langle B \rangle = V, \\ B \text{ és linealment independent.} \end{cases}$

▶ Tot espai vectorial diferent de $\{\overrightarrow{0}\}$ té alguna base no buida. La base de l'espai vectorial $\{\overrightarrow{0}\}$ és el conjunt $\emptyset$.

▶ Tota base d'un espai vectorial té el mateix nombre de vectors.

• La *dimensió* d'un espai vectorial és el nombre de vectors d'una base qualsevol. La dimensió és *finita* si és un nombre natural $n \geq 0$. En cas contrari, és *infinita*.

▷ Notació: dim$V$

1. ESPAIS VECTORIALS (VIII). BASES I DIMENSIÓ

Si V és un espai vectorial real de dimensió finita,

▶ Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és base de V i $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, amb $\alpha_i \neq 0$, llavors $(B \setminus \{u_i\}) \cup \{v\}$ és base de V

▶ Si $v_1, \ldots, v_k$ son vectors lin. independents i $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és base de V i, llavors existeixen $n - k$ vectors de B tals que juntament amb $v_1, \ldots, v_k$ formen base de V.

1. ESPAIS VECTORIALS (IX). BASES I DIMENSIÓ

- Si dim$V = n$,

  n és el màxim nombre de vectors lin. independents de V

  n és el mínim nombre de vectors que generen V

  n vectors linealment independents formen base

  n vectors que generin V formen base

  Si W és subespai de V, dim$W \leq$dim$V$

  Si W és subespai de V i dim$W =$dim$V$, llavors $V = W$

1. ESPAIS VECTORIALS (X). COMPONENTS

▶ Si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ és una base de l'espai vectorial real V de dimensió finita, tot vector de V es pot expressar com a combinació lineal dels vectors de B de forma única:
$v \in V \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tals que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$
$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

▷ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ són els *components* de $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ respecte a la base B.

1. ESPAIS VECTORIALS (XI). COMPONENTS

$\triangleright$ Si dim$V = n$, fixada una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de V identificarem el vector v amb els seus components respecte a B. Escriurem $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ si $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.

$\blacktriangleright$ Si els components de v, w respecte a B són $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors els components de $v + w, \lambda v$ respecte a B són:

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\lambda \cdot v = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

1. ESPAIS VECTORIALS (XII). CANVIS DE BASE

Si V és espai vectorial real de dimensió n, $w \in V$,
$B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ bases de V tals que:
$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n$
$\ldots$
$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$
$(x_1, \ldots, x_n)$ components de w respecte a B
$(x'_1, \ldots, x'_n)$ components de w respecte a B'

Llavors $AX' = X$, on:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

És a dir, les columnes de A són els components dels vectors de B' respecte a la base B.

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$

L'espai afí $\mathbb{R}^n$

Sistemes de coordenades

Canvis de sistemes de coordenades

Equacions paramètriques

Equacions cartesianes de rectes i plans

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (I)

Considerem el conjunt de punts del pla o de l'espai. Fixat un punt O podem identificar cada punt P amb el *vector posició* $\overrightarrow{OP}$. Per tant, per a l'estudi dels punts del pla o de l'espai ens serà útil l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Els objectes de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ són vectors (és a dir, segments orientats: tenen una longitud, direcció i sentit). Els objectes de l'espai afí són punts (l'extrem final del vector posició un cop fixat un punt).

La idea es pot extendre a l'estudi de l'espai afí de dimensió n.

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (II). SISTEMES DE COORDENADES

• *Sistema de coordenades* (o *referència*) de l'espai afí $\mathbb{R}^n$: $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$ tal que

O és un punt (*origen de cooordenades*)

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ és base de l'e.v. $\mathbb{R}^n$ (*eixos de coordenades*)

• *Coordenades afins* del punt P respecte al sistema de referència $S = (O, \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$: són els components $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ del vector $\overrightarrow{OP}$ respecte a la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. És a dir, $\overrightarrow{OP} = p_1e_1 + p_2e_2 + \cdots + p_ne_n$.

▷ Notació: $P = (p_1, \ldots, p_n)$.

▶ Si $P = (p_1, \ldots, p_n)$ i $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ respecte a S, per ser $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$, els components de $\overrightarrow{PQ}$ respecte a $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ són $(q_1 - p_1, \ldots, q_n - p_n)$. Escriurem $\overrightarrow{PQ} = Q - P$.

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (III). CANVI DE SISTEMES DE COORDENADES

▶ Considerem els sistemes de coordenades:
$S = (O, B)$ i $S' = (O', B')$
on $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$.

Si el punt P té coordenades:
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecte a S
$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ respecte a S'

Si el punt O' té coordenades $W = (w_1, \ldots w_n)$ respecte a S
(és a dir, $\overrightarrow{OO'} = w_1 e_1 + \ldots w_n e_n$)

Si A és la matriu de canvi de base (les columnes de A són els components dels vectors de B' respecte a B)

Llavors,
$$X = AX' + W$$
$$X' = A^{-1}(X - W) = A^{-1}X - A^{-1}W$$

▷ $B = B' \Rightarrow A = I_n \Rightarrow X = X' + W$

▷ $O = O' \Rightarrow W = (0, \ldots, 0) \Rightarrow X = AX'$

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (IV). EQUACIONS PARAMÈTRIQUES

• Parametrització de la recta que passa per P i té vector director u: $X = P + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$

• Parametrització de la recta que passa per P i Q:

$$X = P + \lambda \overrightarrow{PQ},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$X = P + \lambda (Q - P),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

• Parametrització del pla que passa per P i té vectors directors u, v: $X = P + \lambda u + \mu v$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

• Parametrització del pla que passa per P, Q i R:

$$X = P + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$X = P + \lambda (Q - P) + \mu (R - P),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (V). EQUACIONS PARAMÈTRIQUES

- Parametrització del segment $\overline{PQ}$:
  $X = P + \lambda\overrightarrow{PQ}$, $\lambda \in [0, 1]$
  $X = P + \lambda(Q - P)$, $\lambda \in [0, 1]$

- Parametrització de la semirecta amb origen P i direcció u:
  $X = P + \lambda u$, $\lambda \geq 0$

- Punt mitjà del segment $\overline{PQ}$: $\dfrac{1}{2}(P + Q)$

- Baricentre del triangle ABC: $\dfrac{1}{3}(A + B + C)$

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (VI). EQUACIONS CARTESIANES

▶ Equació cartesiana de la recta de $\mathbb{R}^2$ que passa per $P = (p_1, p_2)$ i té vector director $u = (u_1, u_2)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} = 0$$

▶ Equació cartesiana de la recta de $\mathbb{R}^2$ que passa per $P = (p_1, p_2)$ i $Q = (q_1, q_2)$:
com el cas anterior amb $u = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (VII). EQUACIONS CARTESIANES

▶ Equació cartesiana del pla de $\mathbb{R}^3$ que passa per $P = (p_1, p_2, p_3)$ i té vectors directors $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0$$

▶ Equació cartesiana del pla de $\mathbb{R}^3$ que passa per $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$: com el cas anterior amb $u = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$, $v = R - P = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$.

2. L'ESPAI AFÍ $\mathbb{R}^n$ (VIII). EQUACIONS CARTESIANES

▶ Equació cartesiana de la recta de $\mathbb{R}^3$ que passa per $P=(p_1,p_2,p_3)$ i té vector director $u=(u_1,u_2,u_3)$:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} < 2.$$

Equival a triar dues equacions independents de les tres següents:

$$\det\begin{pmatrix} x-p_1 & y-p_2 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} = 0, \ \det\begin{pmatrix} x-p_1 & z-p_3 \\ u_1 & u_3 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} y-p_2 & z-p_3 \\ u_2 & u_3 \end{pmatrix} = 0$$

▶ Equació cartesiana de la recta de $\mathbb{R}^3$ que passa per $P=(p_1,p_2,p_3)$ i $Q=(q_1,q_2,q_3)$:
com el cas anterior amb $u=Q-P=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$.

3. PROBLEMES MÈTRICS

Producte escalar

Norma

Distància

Angles

Bases ortonormals

Projecció ortogonal

Orientació

Producte vectorial

Problemes mètrics a $\mathbb{R}^2$ i a $\mathbb{R}^3$

3. PROBLEMES MÈTRICS (I). PRODUCTE ESCALAR

• Un *producte escalar* a un $\mathbb{R}$-espai vectorial V és una forma bilineal simètrica definida positiva:

aplicació $\begin{array}{rcl} \cdot \;:\; V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longrightarrow & u \cdot v \end{array}$ tal que $\forall u, v, w \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
$(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$
$u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$
$u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$ *(bilineal)*

$u \cdot v = v \cdot u$ *(simètrica)*

$u \cdot u \geq 0$
$u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$ *(definida positiva, no degenerada)*

3. PROBLEMES MÈTRICS (II). PRODUCTE ESCALAR

▷ Exemple: $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

▷ Notacions: $u \cdot v$, (u, v), $< u, v >$, $(u|v)$, ...

▶ $\cdot$ producte escalar a $V \Rightarrow \forall u \in V$, $\overrightarrow{0} \cdot u = u \cdot \overrightarrow{0} = 0$.

▶ *Desigualtat de Schwarz*. Si $\cdot$ és un producte escalar a l'espai vectorial V, $\forall u, v \in V$, $(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$
A més, val la igualtat $\Leftrightarrow$ els vectors u, v són lin. dependents.

▷ Formulació equivalent: $|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}$

3. PROBLEMES MÈTRICS (III). NORMA

• Una *norma* a un espai vectorial real V és una aplicació

$$\begin{array}{rccl} \|\ \| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & u & \longrightarrow & \|u\| \end{array}$$ tal que $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualtat triangular)

▷ Exemples. Les aplicacions següents són normes a $\mathbb{R}^n$:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

3. PROBLEMES MÈTRICS (IV). NORMA

Si $\| \ \|$ és una norma a l'espai vectorial V,

- *Vector unitari*: vector $u \in V$ tal que $\|u\| = 1$.

▶ Si $u \in V$, $u \neq \overrightarrow{0}$, $\dfrac{u}{\|u\|}$ és un vector unitari i els vectors u, $\dfrac{u}{\|u\|}$ són linealment dependents.

▶ $\forall u, v \in V, \quad | \, \|u\| - \|v\| \, | \leq \|u - v\|$

3. PROBLEMES MÈTRICS (V). NORMA

• Si $\cdot$ és un producte escalar definit a l'espai vectorial V, l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \| \ \| : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & u & \longrightarrow & \|u\| = +\sqrt{u \cdot u} \end{array}$$

és una norma a V (*norma derivada del producte escalar* $\cdot$)

▷ Exemple. La norma derivada del producte escalar usual de $\mathbb{R}^n$ és la norma usual $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

▶ Hi ha normes que no deriven de cap producte escalar.

3. PROBLEMES MÈTRICS (VI). DISTÀNCIA

• Una *distància* a un conjunt E és una aplicació

$$\begin{array}{rccl} d : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ & (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) \end{array}$$, tal que $\forall x, y, z \in E$:

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

▶ Si $\| \ \|$ és una norma a l'espai vectorial V, l'aplicació $d(u,v) = \|v - u\|$ defineix una distància a V.

▶ Si $\| \ \|$ és una norma a $\mathbb{R}^n$, l'aplicació $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$ és una distància a l'espai afí $\mathbb{R}^n$.

3. PROBLEMES MÈTRICS (VII). ANGLES

• Si $\cdot$ és un producte escalar a espai vectorial V i $\| \ \|$ la norma derivada del producte escalar, l'*angle* determinat pels vectors no nuls $u, v \in V$ és el valor únic $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos\alpha = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \ \|v\|}$

▷ Està ben definit ja que per la desigualtat de Schwarz, $\forall u, v \in V$, $|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = \|u\|\|v\| \Rightarrow -1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\| \ \|v\|} \leq 1$

• Dos vectors $u, v \in V$ són *ortogonals* si $u \cdot v = 0$, és a dir, si $\alpha = \pi/2$. Notació: $u \perp v$.

3. PROBLEMES MÈTRICS (VIII). ANGLES

▶ Si $u, v \in V$ són ortogonals, llavors $\lambda u, \mu v$ són ortogonals per a qualssevol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

▶ Tot conjunt de vectors no nuls i ortogonals dos a dos és linealment independent.

▷ $(-b, a)$ és un vector ortogonal a $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
▷ $(-b, a, 0)$ és un vector ortogonal a $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

3. PROBLEMES MÈTRICS (IX). BASES ORTONORMALS

• Si $\cdot$ és un producte escalar a l'espai vectorial V de dimensió n, una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és *ortonormal* si els vectors són unitaris i ortogonals dos a dos:

$u_i \cdot u_i = 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$u_i \cdot u_j = 0$, si $i \neq j$

▷ Notació. Es defineix $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$.

Llavors la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és ortonormal si $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$.

▷ Exemple.

La base canònica $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ és ortonormal amb el producte escalar usual.

3. PROBLEMES MÈTRICS (X). BASES ORTONORMALS

Si $\cdot$ és un producte escalar a un espai vectorial V, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ és una base ortonormal de V, i els vectors x, y tenen components $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ respecte a B,

- Expressió del producte escalar:
$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- Expressió de la norma derivada del producte escalar:
$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

- Expressió de l'angle determinat per dos vectors:
$$\text{angle}(x, y) = \arccos \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

- Components d'un vector qualsevol:
$$x = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot x) u_i$$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XI). BASES ORTONORMALS

• A és una *matriu ortogonal* si $AA^T = I$ o, equivalentment, $A^{-1} = A^T$.

▶ Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ són bases ortonormals d'un espai vectorial real V, llavors la matriu A de canvi de base que conté els components dels vectors de B' respecte a B és ortogonal (és a dir $A^{-1} = A^T$).

3. PROBLEMES MÈTRICS (XII). BASES ORTONORMALS

▶ Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ són vectors no nuls i ortogonals dos a dos d'un espai vectorial V de dimensió n, llavors $\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$ és base ortonormal de V.

▶ Si $v = (a, b)$ és un vector no nul de $\mathbb{R}^2$, considerem els vectors

$$u_1 = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}},\ u_2 = \frac{(-b,a)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Llavors $\{u_1, u_2\}$ és una base ortonormal de l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar usual tal que els vectors v, u_1 són linealment dependents.

3. PROBLEMES MÈTRICS (XIII). BASES ORTONORMALS

• Sistema de coordenades *rectangular* de l'espai afí $\mathbb{R}^n$: sistema de coordenades $S = (O, B)$ tal que B és una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

▶ Distància entre dos punts. Si $S = (O, \{u_1, \ldots u_n\})$ és un sistema de coordenades rectangular de $\mathbb{R}^n$ i $P, Q \in \mathbb{R}^n$ amb coordenades $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ respecte a S,

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|Q - P\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i)^2}$$

▶ Si els sistemes de coordenades $S = (O, B), S' = (O', B')$ són rectangulars, llavors l'equació del canvi de coordenades és:

$$X = AX' + W \ , \ \ X' = A^T(X - W) = A^T X - A^T W$$

on W són les coordenades de O' respecte a S i A és la matriu de canvi de base.

3. PROBLEMES MÈTRICS (XIV). PROJECCIÓ ORTOGONAL

Si F és subespai de V,

- *Vector ortogonal* a F: $x \in V$ tal que $x \perp u$, $\forall u \in F$.
  Notació: $u \perp F$

▶ Si $\{e_1, \dots e_k\}$ és una base de F:

$$u \perp F \Leftrightarrow u \perp e_i,\ \forall i \in \{1, \dots k\}$$

- *Projecció ortogonal* d'un vector $x \in V$ sobre F:

$$\mathrm{pr}_F(x) = y \in V \text{ tal que } \begin{cases} y \in F \\ (x - y) \perp F \end{cases}$$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XV). PROJECCIÓ ORTOGONAL

- Càlcul de la projecció ortogonal.

  (1) Directament: imposar les condicions de la definició

  Cas particular: $\dim F = 1$. Si $F = \langle u \rangle$, $\mathrm{pr}_F(x) = \dfrac{x \cdot u}{u \cdot u}\, u$

  Cas particular: $\dim F = 2$. Si $F = \langle u, v \rangle$, $\mathrm{pr}_F(x) = \alpha\, u + \beta\, v$

  $$\text{on: } \alpha = \frac{(x \cdot u)(v \cdot v) - (x \cdot v)(u \cdot v)}{(u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)(u \cdot v)}$$

  $$\beta = \frac{(u \cdot u)(v \cdot x) - (u \cdot v)(u \cdot x)}{(u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)(u \cdot v)}$$

  (2) Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és una base ortonormal de F:

  $$\mathrm{pr}_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x \cdot u_i)\, u_i$$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XVI). PROJECCIÓ ORTOGONAL

▶ Si v, w són vectors linealment independents i no nuls de $\mathbb{R}^n$ considerem els vectors $u_1 = \dfrac{v - pr_{\langle w \rangle}(v)}{\|v - pr_{\langle w \rangle}(v)\|}$, $u_2 = \dfrac{w}{\|w\|}$.

Llavors $\{u_1, u_2\}$ és una base ortonormal de $\langle v, w \rangle$ tal que w, u_2 són linealment dependents.

▷ Per calcular la projecció ortogonal d'un vector sobre un subespai $F = \langle v, w \rangle$ de dimensió 2 amb el mètode (2), podem aplicar el resultat anterior per calcular una base $\{u_1, u_2\}$ ortonormal de F. Llavors, la projecció ortogonal d'un vector x sobre F és $\mathrm{pr}_F(x) = (x \cdot u_1)\, u_1 + (x \cdot u_2)\, u_2$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XVII). ORIENTACIÓ

• Dues bases B, B' de R^n tenen la *mateixa orientació* si el determinant de la matriu de canvi de base (components dels vectors de B' respecte a B per columnes) és positiu

• Per conveni, direm que les bases $\{e1, e2\}$ de $\mathbb{R}^2$ i $\{e1, e2, e3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de la figura tenen orientació *positiva o directa*. Les bases que no tenen la mateixa orientació que aquestes direm que tenen orientació *negativa o inversa*.

3. PROBLEMES MÈTRICS (XVIII). ORIENTACIÓ

▶ Una base $\{u_1, u_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ té orientació positiva si la rotació d'angle $\alpha < \pi$ que fa coincidir la direcció i sentit del vector u_1 amb la del vector u_2 és en sentit antihorari.

▶ Una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ té orientació positiva si segueix la *llei del llevataps*.

3. PROBLEMES MÈTRICS (XIX). PRODUCTE VECTORIAL

• El *producte vectorial* de $\mathbb{R}^3$ és l'aplicació
$$\begin{array}{rccc} \wedge: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \to & u \wedge v \end{array}$$
definida per $u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) =$
$= (\det(u,v,(1,0,0)), \det(u,v,(0,1,0)), \det(u,v,(0,0,1)))$.

▷ Càlcul. Els components de $u \wedge v$ són els coeficients de i, j, k a l'expressió $\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$.

▶ Fixats $u, v \in \mathbb{R}^3$ el producte vectorial $u \wedge v$ és l'únic vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $\quad \forall w \in \mathbb{R}^3,\ \det(u,v,w) = (u \wedge v) \cdot w$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XX). PRODUCTE VECTORIAL

▶ $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1. $u \wedge v = -v \wedge u, \quad u \wedge u = \overrightarrow{0}$

2. $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v) = u \wedge (\lambda v)$

$(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$

$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

3. $u \wedge v = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u, v$ són linealment dependents

4. $u \perp (u \wedge v), \ v \perp (u \wedge v)$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXI). PRODUCTE VECTORIAL

5. El producte vectorial no és associatiu. Contraexemple: Si $u=(1,0,0), v=(0,1,0), w=(1,1,1)$, $(u\wedge v)\wedge w=(-1,1,0)\neq(0,1,0)=u\wedge(v\wedge w)$

6. $\|u\wedge v\|^2=\|u\|^2\,\|v\|^2-(u\cdot v)^2$
$\|u\wedge v\|=\|u\|\,\|v\|\sin\alpha$, on $\alpha=\text{angle}(u,v)$

7. u,v linealment independents $\Rightarrow\{u,v,u\wedge v\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ d'orientació positiva

8. u,v ortogonals i unitaris $\Rightarrow\{u,v,u\wedge v\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ d'orientació positiva

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXII). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^2$ i a $\mathbb{R}^3$

- Vector *normal* a un pla: vector ortogonal a tots els vectors directors del pla

- Angles.

Angle entre dues rectes: angle entre 0 i $\pi/2$ determinat per vectors directors de les rectes

Angle entre dos plans: angle entre 0 i $\pi/2$ determinat per vectors normals als plans

Angle entre recta i pla: complementari de l'angle entre 0 i $\pi/2$ determinat per un vector director de la recta i un vector normal al pla

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXIII). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^2$ i a $\mathbb{R}^3$

• Paral.lelisme: l'angle que formen les varietats lineals és 0.

Rectes paral.leles: tenen el vectors directors proporcionals

Plans paral.lels: tenen vectors normals proporcionals

Recta i pla paral.lels: el vector director de la recta és combinació lineal dels vectors directors del pla (o bé el vector director de la recta és ortogonal al vector normal al pla).

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXIV). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^2$ i a $\mathbb{R}^3$

• Perpendicularitat: l'angle que formen les varietats lineals és $\pi/2$.

Rectes perpendiculars: els vectors directors de les dues rectes són ortogonals

Plans perpendiculars: els vectors normals dels plans són ortogonals

Recta perpendicular al pla: el vector director de la recta és normal al pla

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXV). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^3$

Equació d'un pla π de $\mathbb{R}^3$: $ax + by + cz + d = 0$
Notació: $u = (a, b, c)$, $X = (x, y, z)$

▶ L'equació de π es pot escriure $u \cdot X + d = 0$

▶ u és un vector normal al pla (ortogonal a tots els vectors directors del pla): $\forall P, Q \in \pi, \quad u \perp \overrightarrow{PQ}$

▶ L'equació del pla que passa per P i té vector normal u és $u \cdot (X - P) = 0$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XVI). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^3$

P punt

π pla: $ax + by + cz + d = 0$

$u = (a, b, c)$, $X = (x, y, z) \Rightarrow u \cdot X + d = 0$

Q punt de π; v, w vectors directors de π

- Recta que passa per P perpendicular a π:
$$r: \quad X = P + \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
- Projecció ortogonal del punt P sobre sobre el pla π:
$$P' = r \cap \pi = P - \left(\frac{u \cdot P + d}{u \cdot u}\right) u = Q + \mathrm{pr}_{<v,w>}(\overrightarrow{QP})$$
- Distància del punt P al pla π:
$$d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{|u \cdot P + d|}{\|u\|}$$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXVII). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^3$

P punt

r recta que passa per Q i vector director v: $X = Q + \lambda v,\ \lambda \in \mathbb{R}$

- Pla que passa per P perpendicular a r:

$$\pi : (X - P) \cdot v = 0$$

- Projecció ortogonal de P sobre r:

$$P' = r \cap \pi = Q + \left(\frac{v \cdot \overrightarrow{QP}}{v \cdot v} \right) v = Q + \mathrm{pr}_{\langle v \rangle}(\overrightarrow{QP})$$

- Distància del punt P a la recta r:

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \frac{(v \cdot \overrightarrow{PQ})^2}{v \cdot v}}$$

$$d(P, r) = \frac{\|v \wedge \overrightarrow{QP}\|}{\|v\|}$$

3. PROBLEMES MÈTRICS (XXVIII). PROBLEMES MÈTRICS A $\mathbb{R}^3$

r recta per A i vector director v: $X = A + \lambda v, \ \lambda \in \mathbb{R}$
s recta per B i vector director w: $X = B + \mu w, \ \mu \in \mathbb{R}$

▶ Distància entre r i s:

Si v, w són l. independents, $d(r, s) = \dfrac{|\overrightarrow{AB} \cdot u|}{\|u\|}$, on $u = v \wedge w$

Si v, w són l. dependents, $d(r, s) = d(r, B) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge v\|}{\|v\|}$

4. APLICACIONS LINEALS

Aplicació lineal

Matriu associada a una aplicació lineal

Exemples

Imatge d'una aplicació lineal

Aplicacions lineals injectives

Operacions

Canvis de base

4. APLICACIONS LINEALS (I)

• Si E, F són espais vectorials reals, una aplicació $f : E \longrightarrow F$ és *lineal* si:

$$\forall u, v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

• *Endomorfisme*: aplicació lineal $f : E \longrightarrow E$

▶ Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal,

$f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

$\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u)$

Si V és subespai de E, llavors $f(V)$ és subespai de F

Si W és subespai de F, llavors $f^{-1}(W)$ és subespai de E

4. APLICACIONS LINEALS (II)

▶ Si $f : E \to F$ és una aplicació lineal, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de E i $v \in E$ té components $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ respecte a B,

$$f(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(e_i)$$

▶ Si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ són vectors linealment independents de E i $\{v_1, \ldots, v_k\}$ són vectors qualssevol de F, existeix una aplicació lineal $f : E \to F$ tal que $f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_k) = v_k$.
A més, aquesta aplicació f és única si, i només si, $k = \dim E$ (és a dir, si $\{u_1, \ldots, u_k\}$ és una base de E).

4. APLICACIONS LINEALS (III). MATRIU ASSOCIADA

• Si $f : E \longrightarrow F$ és aplicació lineal, $\dim E = n$, $\dim F = m$, $B_E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E, $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de F,

$f(e_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{m1}v_m,$
$f(e_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{m2}v_m,$
$\ldots\ldots\ldots$
$f(e_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{mn}v_m,$

la *matriu associada* a f en les bases B_E, B_F és:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

($M =$ components de les imatges dels vectors de B_E respecte a B_F per columnes)

$\triangleright$ Si $f : E \rightarrow E$ és un endomorfisme, normalment s'utilitza la mateixa base B_E a l'espai de sortida i d'arribada per calcular la matriu associada a f.

4. APLICACIONS LINEALS (IV). MATRIU ASSOCIADA

- $f : E \longrightarrow F$ aplicació lineal,
  $B_E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E, $B_F = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de F,
  M matriu associada a f en les bases B_E, B_F,
  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ components de $u \in E$ respecte a B_E,
  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ components de $f(u) \in F$ respecte a B_F,

$\Longrightarrow MX = Y$

4. APLICACIONS LINEALS (V). EXEMPLES

Endomorfismes $f : E \to E$, $\dim E = n$.

▷ *Identitat*: $I(u) = u$, $\forall u \in E$.
La matriu associada és $M = I_n$ en qualsevol base de E.

▷ *Homotècia*: $f(u) = \lambda u$, $\forall u \in E$.
La matriu associada és $M = \lambda I_n$ en qualsevol base de E

▷ *Canvi d'escala*: si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base de E, $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
La matriu associada en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és la matriu diagonal

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4. APLICACIONS LINEALS (VI). EXEMPLES

Endomorfismes de $\mathbb{R}^2$. Si M és la matriu associada en la base canònica:

$\triangleright$ *Rotació* d'angle α: $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\triangleright$ *Simetria* respecte a la direcció $(1,0)$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Endomorfismes de $\mathbb{R}^3$. Si M és la matriu associada en la base canònica:

$\triangleright$ *Rotació* d'angle α resp. $\langle(0,0,1)\rangle$: $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\triangleright$ *Simetria* resp. $\langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. APLICACIONS LINEALS (VII). IMATGE

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal,

• *Imatge* de f: Im$f = f(E) = \{f(u) \,|\, u \in E\}$

▶ Imf és un subespai vectorial de F

• *Rang* de f: rang$f = \dim \mathrm{Im} f$

▶ Si M és la matriu associada a f en bases B_E de E i B_F de F, llavors rang$f =$ dimIm$f =$ rang$M$

4. APLICACIONS LINEALS (VIII). APLICACIONS INJECTIVES

Si $f : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal,

▶ f és injectiva $\Rightarrow$ f transforma vectors de E linealment independents en vectors de F linealment independents

▶ f és injectiva $\Leftrightarrow$ $\text{rang} f = \dim E$

▶ Si $\dim E = \dim F = n$ i M és una matriu associada a f,
f és injectiva $\Leftrightarrow$ f és exhaustiva $\Leftrightarrow$ f és bijectiva $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\text{rang} f = n \Leftrightarrow \det M \neq 0$
▷ Cas particular. Si f és un endomorfisme, val la propietat anterior.

4. APLICACIONS LINEALS (IX). OPERACIONS

E, F, G espais vectorials reals de dimensió finita,
B_E, B_F, B_G bases de E, F, G respectivament
$f, g : E \longrightarrow F$, $h : F \longrightarrow G$ aplicacions lineals
M_f matriu associada a f en les bases B_E, B_F
M_g matriu associada a g en les bases B_E, B_F
M_h matriu associada a h en les bases B_F, B_G

▶ $f + g : E \longrightarrow F$ és una aplicació lineal i la matriu associada a $f + g$ en les bases B_E, B_F és $M_f + M_g$

▶ $\lambda f : E \longrightarrow F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, és una aplicació lineal i la matriu associada a λf en les bases B_E, B_F és λM_f

▶ $h \circ f : E \longrightarrow G$ és una aplicació lineal i la matriu associada a $h \circ f$ en les bases B_E, B_G és $M_h M_f$

▶ Si f és bijectiva, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ és aplicació lineal i la matriu associada a f^{-1} en les bases B_F, B_E és M_f^{-1}

4. APLICACIONS LINEALS (X). CANVIS DE BASE

- E, F espais vectorials reals de dimensió finita,
  $f : E \longrightarrow F$ aplicació lineal
  B_E, B'_E bases de E; B_F, B'_F bases de F
  M matriu associada a f en les bases B_E, B_F
  M' matriu associada a f en les bases B'_E, B'_F
  P matriu de canvi de base a E: columnes de P=
  components dels vectors de B'_E respecte a B_E
  Q matriu de canvi de base a F: columnes de Q=
  components dels vectors de B'_F respecte a B_F

  Llavors $M' = Q^{-1}MP$

4. APLICACIONS LINEALS (XI). CANVIS DE BASE

- Cas particular: $f : E \to E$ endomorfisme, $\dim E = n$.
  B, B' bases de E
  M matriu associada a f en la base B: columnes de M=
  components de les imatges dels vectors de B respecte a B
  M' matriu associada a f en la base B': columnes de M'=
  components de les imatges dels vectors de B' respecte a B'
  P matriu de canvi de base: columnes de P=
  components dels vectors de B' respecte a B

  Llavors $M' = P^{-1}MP$

4. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$

---

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (I)

• *Afinitat* a $\mathbb{R}^n$: aplicació $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que fixat un sistema de coordenades S de $\mathbb{R}^n$ està definida per

$$f(X) = AX + W$$

on:

A és una matriu $n \times n$

W és un vector columna $n \times 1$

X són les coordenades d'un punt P respecte a S

$f(X)$ són les coordenades de $f(P)$ respecte a S

$\triangleright$ W és el vector translació de l'afinitat

$\triangleright$ A determina la part lineal de l'afinitat.

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (II). MATRIU AMPLIADA

• *Matriu ampliada* associada a una afinitat. Si $f(X) = AX + W$ en el sistema de coordenades S, llavors

$$M_{A,W} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & W \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de forma que

$$\left(\begin{array}{c} f(X) \\ \hline 1 \end{array}\right) = M_{A,W} \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & W \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (III). EXEMPLES

• *Identitat*, I.
L'aplicació identitat $I(X) = X$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, és l'afinitat tal que $A = I_n$ i $W = 0$. És a dir, la matriu ampliada és I_{n+1}.

• *Translació de vector* W, T_W.
Afinitat tal que $A = I_n$: $T_W(X) = X + W$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$

▷ Matriu ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} & I_n & & W \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$

▷ La identitat és la translació de vector $\overrightarrow{0}$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (IV). EXEMPLES

• *Canvi d'escala* $E_O^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}$ respecte a O i eixos determinats per $e_1,\dots,e_n$. Afinitat tal que en el sistema de coordenades $S=(O,\{e_1,\dots,e_n\})$, $W=0$ i A és diagonal:

$$E_O^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}(x_1,\dots,x_n)=(\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2,\dots,\lambda_n x_n)$$

▷ Matriu ampliada: $\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$

▷ Si $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\lambda$ s'anomena *homotècia* de raó λ i la denotarem H_O^λ

▷ La identitat és una homotècia de raó 1

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (V). EXEMPLES

• *Projecció paral.lela a* $\mathbb{R}^3$*.* La projecció sobre el pla $z = 0$ paral.lela a $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u_3 \neq 0$, fa correspondre al punt X la intersecció del pla $z = 0$ amb la recta que passa per X i té vector director u.

$\triangleright$ Matriu ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -u_1/u_3 & 0 \\ 0 & 1 & -u_2/u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (VI). COMPOSICIÓ

▶ f, g afinitats $\Rightarrow$ $g \circ f$ afinitat

▶ La composició d'afinitats no és en general commutativa

▷ *Exemple*. $H_O^2 \circ T_{(1,0)} \neq T_{(1,0)} \circ H_O^2$ a $\mathbb{R}^2$

▶ Si M és la matriu ampliada de f i N és la matriu ampliada de g en un sistema de coordenades S $\Rightarrow$ NM és la matriu ampliada de $g \circ f$ en el sistema de coordenades S

▶ $f(X) = AX + W$, $g(X) = BX + V$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (g \circ f)(X) = (BA)X + (BW + V)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (VII). AFINITATS BIJECTIVES

▶ Si $f : R^n \to R^n$ és una afinitat definida per $f(X) = AX + W$ en un sistema de coordenades S,
f és bijectiva $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det M_{A,W} \neq 0$

▷ En aquest cas, f^{-1} és una afinitat i la matriu ampliada associada a f^{-1} en el sistema de coordenades S és

$$M_{A,W}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A^{-1} & & -A^{-1}W \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (VIII). AFINITATS BIJECTIVES

Exemples

▶ Les translacions T_W són afinitats bijectives i la inversa és $T_W^{-1} = T_{-W}$.

La composició de translacions és una translació:

$T_U \circ T_W = T_{U+W}$

▶ Un canvi d'escala $E_O^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n}$ és bijectiu $\Leftrightarrow \forall i, \lambda_i \neq 0$

En aquest cas l'afinitat inversa és $E_O^{\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}}$

▶ La projecció paral.lela a $\mathbb{R}^3$ de vector u sobre $z = 0$ és una afinitat no bijectiva

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (IX). PROPIETATS

▶ Si P_1, P_2, P_3 són punts no alineats i Q_1, Q_2, Q_3 són punts qualssevol de $\mathbb{R}^2$, existeix una afinitat $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(P_i) = Q_i$, per a $i = 1, 2, 3$.

▶ Si P_1, P_2, P_3, P_4 són punts no coplanaris i Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 són punts qualssevol de $\mathbb{R}^3$, existeix una afinitat $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(P_i) = Q_i$, per a $i = 1, 2, 3, 4$.

▶ Les afinitats transformen una recta en una recta o un punt

▶ Les afinitats transformen un pla en un pla, recta o punt

▶ Les afinitats transformen segments en segments

▶ En general, les afinitats no conserven distàncies: si f és una afinitat, en general NO es compleix $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (X). DESPLAÇAMENTS

• *Desplaçament*: afinitat que conserva distàncies, és a dir, afinitat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$

▶ Si f és una afinitat tal que $f(X) = AX + W$ en un sistema de coordenades rectangular, llavors

f és un desplaçament $\Leftrightarrow$ A és ortogonal ($A^T = A^{-1}$)

▶ f desplaçament $\Rightarrow$ $\det A = \pm 1$ i f és bijectiva

▷ *Exemples*. Les translacions són desplaçaments. Un canvi d'escala no és un desplaçament, llevat que sigui la identitat. La projecció paral.lela a $\mathbb{R}^3$ no és desplaçament.

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XI). DESPLAÇAMENTS 2D I 3D

- *Desplaçaments 2D*. Composició de:
  Identitat
  Translacions
  Rotacions respecte a un centre (punt)
  Simetries axials

- *Desplaçaments 3D*. Composició de:
  Identitat
  Translacions
  Rotacions respecte a un eix
  Simetries especulars
  Simetries centrals

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XII). MATRIU AMPLIADA DELS DESPLAÇAMENTS ELEMENTALS 2D

Translació de vector $W = (w_1, w_2)$, T_W :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rotació d'angle α resp. a l'origen, R_O^α :

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simetria respecte a l'eix OX, S_{OX} :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simetria respecte a l'eix OY, S_{OY} :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XIII). MATRIU AMPLIADA DELS DESPLAÇAMENTS ELEMENTALS 3D

Translació de vector $W = (w_1, w_2, w_3)$, T_W :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rotació d'angle α i eix OX, R^{α}_{OX} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rotació d'angle α i eix OY, R^{α}_{OY} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rotació d'angle α i eix OZ, R^{α}_{OZ} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XIV). MATRIU AMPLIADA DELS DESPLAÇAMENTS ELEMENTALS 3D

Simetria especular resp. al pla XY $(z = 0)$, S_{XY} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simetria especular resp. al pla XZ $(y = 0)$, S_{XZ} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simetria especular resp. al pla YZ $(x = 0)$, S_{YZ} :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Simetria central resp. a l'origen, S_O :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XV). MATRIU AMPLIADA D'ALTRES AFINITATS 2D i 3D

▶ *Matriu ampliada d'una afinitat f qualsevol de $\mathbb{R}^n$.* Escrivim l'afinitat com a composició d'afinitats elementals de les quals coneixem la matriu ampliada. Llavors la matriu ampliada de f és el producte de matrius ampliades.

Afinitats elementals 2D:

translacions
canvis d'escala/homotècies respecte a l'origen
rotacions respecte a l'origen
simetries axials respecte als eixos de coordenades

Afinitats elementals 3D:

translacions
canvis d'escala/homotècies respecte a l'origen
rotacions respecte als eixos de coordenades
simetries especulars respecte als plans de coordenades
simetria central respecte a l'origen

5. AFINITATS A $\mathbb{R}^n$ (XVI). MATRIU AMPLIADA D'ALTRES AFINITATS 2D i 3D

Exemples

▷ *Rotació* de centre C i angle α (a $\mathbb{R}^2$):

$$R_C^\alpha = T_C \circ R_O^\alpha \circ T_{-C}$$

▷ *Homotècia* de raó λ respecte al punt P (a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$):

$$H_P^\lambda = T_P \circ H_O^\lambda \circ T_{-P}$$

▷ *Simetria axial* d'eix e que passa pel punt P i forma un angle α amb l'eix OX (a $\mathbb{R}^2$):

$$S_e = T_P \circ R_O^\alpha \circ S_{OX} \circ R_O^{-\alpha} \circ T_{-P}$$

A. REPÀS

Transformacions elementals de matrius

Rang d'un matriu

Base i dimensió de subespais vectorials

Sistemes d'equacions lineals

Inversa d'una matriu

Determinants

Rang per menors. Inversa per adjunts

A. TRANSFORMACIONS ELEMENTALS DE MATRIUS (I)

- *Matriu* $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

▷ $M(m, n, \mathbb{R})$: conjunt de matrius $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

▷ $M(n, \mathbb{R})$: conjunt de matrius $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$

- *Matriu nul.la*, O: matriu tal que tots els elements són 0.
- *Matriu identitat*, I_n: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R})$

A. TRANSFORMACIONS ELEMENTALS DE MATRIUS (II)

• *Matriu esglaonada per files*: les files nul.les estan al final, i el primer element $\neq 0$ d'una fila no nul.la està més a la dreta que el de la fila anterior.

• *Matriu transposada* de A, A^T: l'element de la fila i i columna j de A^T és l'element de la fila j i columna i de A. És a dir, les files de A^T són les columnes de A.

A. TRANSFORMACIONS ELEMENTALS DE MATRIUS (III)

• *Transformacions elementals per files* d'una matriu:
(1) Permutar dues files
(2) Multiplicar una fila per un escalar diferent de zero
(3) Sumar a una fila una altra fila multiplicada per un escalar

• Dues matrius són *equivalents per files* si una es pot obtenir de l'altra amb successives transformacions elementals per files.

• Anàlogament es defineixen les *transformacions elementals per columnes* i matrius *equivalents per columnes*.

▶ Les dimensions d'una matriu no canvien al fer transformacions elementals.

A. TRANSFORMACIONS ELEMENTALS DE MATRIUS (IV)

▶ Una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ es equivalent per files a una matriu esglaonada per files.

▶ Una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ es équivalent amb transformacions elementals per files i permutant columnes a una matriu de la forma $\left(\begin{array}{c|c} I_k & N \\ \hline O & O \end{array}\right)$, $k \leq m, n$.

A. RANG D'UNA MATRIU

$\triangleright$ Si $A \in M(m, n, \mathbb{R})$, podem considerar les files de A com a vectors de $\mathbb{R}^n$ i les columnes de A com a vectors de $\mathbb{R}^m$.

• *Rang* d'una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{R})$: és la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$ generat pels vectors fila de A, que coincideix amb la dimensió del subespai vectorial de $\mathbb{R}^m$ generat pels vectors columna de A.

$\blacktriangleright$ Si una matriu B s'obté amb transformacions elementals successives de A, llavors rang$A =$ rang$B$.

$\blacktriangleright$ El rang d'una matriu esglaonada per files és el nombre de files no nul.les.

A. BASE I DIMENSIÓ DE SUBESPAIS VECTORIALS

▶ Si la matriu B s'obté amb transformacions elementals per files de la matriu A, el subespai generat pels vectors fila de A és el mateix que el subespai generat pels vectors fila de B.

▶ $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ són linealment independents si el rang de la matriu que s'obté escrivint els components dels vectors per files és k.

▶ w és combinació lineal de $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ si el rang de la matriu que s'obté escrivint els components dels vectors $\{v_1, \ldots, v_k\}$ per files coincideix amb el rang de la matriu que s'obté escrivint els components dels vectors $\{v_1, \ldots, v_k, w\}$ per files.

A. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS (I)

• Si $A \in M(m, n, \mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M(m, 1, \mathbb{R})$,
llavors $AX = B$ és un *sistema d'equacions lineals* amb m equacions i n incògnites, $x_1, \ldots, x_n$. A és la *matriu de coeficients* i $(A|B)$ la *matriu ampliada* associada al sistema. Si $B = O$, el sistema és *homogeni*.

▶ Les solucions d'un sistema d'equacions lineals no varien si
(1) Permutem dues equacions
(2) Multipliquem una equació per un escalar diferent de 0
(3) A una equació li sumem una altra equació multiplicada per un escalar

A. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS (II)

▶ Si $(A|B)$ i $(A'|B')$ són matrius equivalents per files, els sistemes d'equacions que representen tenen les mateixes solucions.

▶ La matriu $(A|B)$ es équivalent per files i, si cal, permutant columnes a una matriu de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_k & N & \multirow{2}{*}{C} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & \end{array}\right)$$

A. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS (III)

▶ El sistema d'equacions associat a la matriu $\left(\begin{array}{c|c|c} I_k & N & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & C \end{array}\right)$

té solució si, i només si, $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$, i llavors la solució vé donada en funció de $n-k$ paràmetres: si no hem permutat columnes, podem expressar $x_1, \ldots, x_k$ en funció de $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

▶ El sistema $AX = B$ té solució $\Leftrightarrow$ rang$A$ = rang$(A|B)$.
En aquest cas, la solució és única $\Leftrightarrow$ rang$A$ = rang$(A|B) = n$.

▶ Un sistema homogeni sempre té la solució trivial $(0, \ldots, 0)$.
El sistema homogeni $AX = 0$ té solució no trivial $\Leftrightarrow$ rang$A < n$.

A. CÀLCUL DE LA INVERSA D'UNA MATRIU

• Una matriu $A \in M(n, \mathbb{R})$ és *invertible* si existeix una matriu $A^{-1} \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. La matriu A^{-1} és la *inversa* de A.

▶ Una matriu $A \in M(n, \mathbb{R})$ és invertible $\Leftrightarrow$ rang$A = n$

▶ Si una matriu $A \in M(n, \mathbb{R})$ és invertible, la matriu $\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right)$ és equivalent per files a la matriu $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right)$

A. DETERMINANTS (I)

• *Determinant* d'una matriu $A \in M(n, \mathbb{R})$.

Si $n = 1$: $\det(a) = a$

Si $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Si $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

En general, si $n \geq 2$, definim recursivament:

fixada una fila k, $1 \leq k \leq n$: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

fixada una columna k, $1 \leq k \leq n$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

on A_{ij} és l'*adjunt* de l'element de la fila i i columna j:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times$ (determinant de la matriu que resulta al suprimir la fila i i la columna j de A)

A. DETERMINANTS (II)

▷ Si $u_1, \ldots, u_n$ són vectors de R^m, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ representa la matriu $m \times n$ tal que els vectors columna són $u_1, \ldots, u_n$.

▶ Propietats dels determinants.

$\det(u_1, \ldots, \alpha \cdot u_i, \ldots, u_n) = \alpha \det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$

$\det(u_1, \ldots, \overrightarrow{0}, \ldots, u_n) = 0$

$\det(u_1, \ldots, u_n) = 0$, si $u_i = u_j$ per a algun $i \neq j$

$\det(u_1, \ldots, u_n) = 0$, si $u_i = \alpha \cdot u_j$ per a algun $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\det(u_1, \ldots, u_n) = 0$, si u_i és combinació lineal de $\{u_j | j \neq i\}$

$\det(u_1, \ldots, u_i + v_i, \ldots, u_n) = \det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) + \det(u_1, \ldots, v_i, \ldots, u_n)$

$\det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -\det(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$

$\det(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \det(u_1, \ldots, u_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k u_k, \ldots, u_n)$

$\det A^T = \det A$

$\det AB = \det A \det B$, $\det A^{-1} = 1 / \det A$

▶ Les propietats anteriors són vàlides també per files.

A. RANG PER MENORS. INVERSA PER ADJUNTS

• *Menor d'ordre* r d'una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{R})$: determinant d'una matriu $r \times r$ formada pels elements de r files i r columnes de A.

▶ rang$A = k \Leftrightarrow$ existeix algun menor d'ordre k de A no nul i tot menor d'ordre $> k$ és nul.

▶ Si $A \in M(n, \mathbb{R})$, rang$A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

▶ $A \in M(n, \mathbb{R})$ és invertible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

▶ Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ és invertible, llavors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T$,
és a dir, l'element de la fila i i columna j de la matriu (A_{ij}) és l'adjunt A_{ij} de l'element de la fila i i columna j de A.