

MATEMÀTICA DISCRETA

Resums de combinatòria

Mercè Mora

Facultat d'Informàtica de Barcelona. UPC.

Curs 2006-2007/Q2

I. Principis d'enumeració (2-27)

II. Funcions generadores (28-50)

A1. Nombre de solucions enteres d'una equació (51-68)

A2. Resolució d'equacions recurrents lineals a coeficients constants (69-88)

I. PRINCIPIS D'ENUMERACIÓ

1. Principis bàsics
2. Permutacions
3. Permutacions amb repetició
4. Combinacions. Nombres binomials
5. Combinacions amb repetició. Multiconjunts
6. Nombres multinomials
7. Particions d'un conjunt
8. Nombres de Catalan
9. Particions d'un enter
10. Principi d'inclusió-exclusió. Desarranjaments
11. Distribució de boles en capses

1. PRINCIPIS BÀSICS (I)

- Dos conjunts A i B tenen el mateix nombre d'elements si existeix una bijecció $f : A \longrightarrow B$
- Conjunt *finit*: \emptyset o bé existeix una bijecció $f : A \longrightarrow [n]$ per a algun natural $n \geq 1$, on $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.
 - ▷ Notació: Si existeix $f : A \longrightarrow [n]$ bijectiva direm que A és un *n-conjunt* i $n = |A| = \#A$ és el *cardinal* de A .
- Conjunt *infinit*: conjunt no finit

1. PRINCIPIS BÀSICS (II)

► Si A és un conjunt finit,

1) $B \subseteq A \Rightarrow |B| \leq |A|$

2) $B \subsetneq A \Rightarrow |B| < |A|$

3) $(B \subseteq A \text{ i } |B| = |A|) \Rightarrow A = B$

► $|A| = n \Rightarrow |\{B \mid B \subseteq A\}| = |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

► $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

► A_1, \dots, A_k disjunts dos a dos \Rightarrow

$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$

► $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

1. PRINCIPIS BÀSICS (III)

- Producte cartesià dels conjunts A i B :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

► $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- Si $S \subseteq A \times B$, definim:

si $a \in A$, $f_a(S) = \{b \in B | (a, b) \in S\} \subseteq B$

si $b \in B$, $c_b(S) = \{a \in A | (a, b) \in S\} \subseteq A$

► $|S| = \sum_{a \in A} |f_a(S)| = \sum_{b \in B} |c_b(S)|$

1. PRINCIPIS BÀSICS (IV): PRINCIPI DE LES CASELLES

- ▶ Si distribuim n objectes en m capsas i $n > m$, almenys una capsa contindrà dos o més objectes
- ▶ Si distribuim n objectes en m capsas i $n > rm$, almenys una capsa contindrà $r+1$ o més objectes
- ▶ Si $f : A \longrightarrow B$ és una aplicació i $|A| > |B|$, llavors f no pot ser injectiva

2. PERMUTACIONS

• Una k -permutació d'un n -conjunt X , és una successió de k elements diferents de X

▷ Notació: $P(n, k) =$ nombre de k -permutacions d'un n -conjunt

▶ Càlcul: $P(n, k) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$,
si $1 \leq k \leq n$; $P(n, k) = 0$ si $k > n$

▷ Si $k = n$, $P(n, n) = n^{\underline{n}} = n! = P(n)$ (permutacions de X)

▶ El nombre d'aplicacions injectives $f : A \longrightarrow B$,
on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $n^{\underline{k}}$

▶ El nombre d'aplicacions bijectives $f : A \longrightarrow B$,
on $|A| = |B| = n$, és $n!$

3. PERMUTACIONS AMB REPETICIÓ

- Una *k*-permutació amb repetició d'un *n*-conjunt *X*, és una successió de *k* elements no necessàriament diferents de *X*

- ▷ Notació: $PR(n, k)$ = nombre de *k* permutacions amb repetició d'un *n*-conjunt

- ▶ Càlcul: $PR(n, k) = n^k$, si $k \geq 1$

- ▶ El nombre d'aplicacions $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és n^k

- ▶ El nombre de subconjunts d'un *n*-conjunt és 2^n

5. COMBINACIONS. NOMBRES BINOMIALS. (I)

- Una k -combinació d'un n -conjunt X , és un k -subconjunt de X

▷ Notació: $C(n, k) = \binom{n}{k}$ = nombre de k -subconjunts d'un n -conjunt. Els nombres $\binom{n}{k}$ s'anomenen *binomials*.

▶ Càlcul: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, si $0 \leq k \leq n$

▶ $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$,

si $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$.

5. COMBINACIONS. NOMBRES BINOMIALS. (II)

► Teorema del binomi. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

► $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

► $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

► $\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$

► $\sum_{r=0}^k \binom{n+r}{r} = \binom{n+k+1}{k}$, $\sum_{r=0}^k \binom{n+r}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$

► $\sum_{r=0}^k \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$ (Identitat de Vandermonde)

5. COMBINACIONS AMB REPETICIÓ. MULTICONJUNTS. (I)

- Un k -multiconjunt d'un n -conjunt X , és una selecció no ordenada de k elements de X no necessàriament diferents

▷ Notació: $M = \{x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}\}$ representa el k -multiconjunt de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ que conté k_i còpies de l'element x_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on $\sum_{i=1}^n k_i = k$.

- Una k -combinació amb repetició d'un n -conjunt X , és un k -multiconjunt de X

5. COMBINACIONS AMB REPETICIÓ. MULTICONJUNTS. (II)

▷ Notació: $CR(n, k) = \left(\binom{n}{k} \right) =$ nombre de k -combinacions amb repetició d'un n -conjunt = nombre de k -multiconjunts d'un n -conjunt

▶ Càlcul: $CR(n, k) = \left(\binom{n}{k} \right) = \binom{n + k - 1}{k}$

▶ El nombre de n -eples (x_1, \dots, x_n) , $x_i \geq 0$ enters, que satisfan l'equació $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ és $\left(\binom{n}{r} \right) = \binom{n + r - 1}{r}$

RESUM: NOMBRE DE k-SELECCIONS D'UN n-CONJUNT

	SENSE REPETICIÓ	AMB REPETICIÓ
ORDENADES	$P(n, k) = n^{\underline{k}}$	$PR(n, k) = n^k$
NO ORDENADES	$C(n, k) = \binom{n}{k}$	$CR(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$

RESUM: NOMBRE D'APLIC. $f : A \longrightarrow B$, $|A| = k$, $|B| = n$

	APLICACIONES	APL. INJECTIVES	APL. BIJECTIVES
NOMBRE	n^k	$n^{\underline{k}}$	$\begin{cases} n! & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$

6. NOMBRES MULTINOMIALS

- Una *permutació d'un k -multiconjunt* és una ordenació dels elements del multiconjunt

▷ Notació: $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ = nombre de permutacions d'un k -multiconjunt $M = \{x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}\}$, on $\sum_{i=1}^n k_i = k$. (*Nombres multinomials*).

▶ Càlcul: $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$.

▶ Teorema multinomial.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

7. PARTICIONS D'UN CONJUNT (I)

• Una k -partició d'un n -conjunt X és una col·lecció $\{A_1, \dots, A_k\}$ de subconjunts de X tal que:

$$(a) A_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$(b) \bigcup_{i=1}^k A_i = X$$

$$(c) A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j$$

▷ Notació: el nombre de k -particions d'un n -conjunt és el nombre de Stirling de segon tipus, $S(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

► El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} n!$

7. PARTICIONS D'UN CONJUNT (II)

► $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$; $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, si $n \geq 1$.

► Si $n \geq 1$:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1 ; \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1 ; \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \text{ si } k > n ; \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1.$$

► Si $n \geq 3$, $2 \leq k \leq n - 1$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

• El nombre de particions d'un n -conjunt és $B_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}, & \text{si } n \geq 1, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases}$

B_n s'anomena *nombre de Bell*.

8. NOMBRES DE CATALAN (I)

Considerem els nombres següents:

- $A_n =$ Nombre d'expressions sintàcticament correctes que es poden formar amb n parells de parèntesis, és a dir, n parèntesis que obren i n parèntesis que tanquen.

- $B_n =$ Nombre de paraules de longitud $2n$, $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, tals que $x_i = \pm 1$, $\sum_{i=1}^k x_i \geq 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, i $\sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$.

- $C_n =$ Nombre de camins de $(0,0)$ a $(2n,0)$ que es poden formar amb segments de tipus $(i,j)(i+1,j+1)$ i de tipus $(i,j)(i+1,j-1)$ i que no travessen l'eix OX .

8. NOMBRES DE CATALAN (II)

► Es pot comprovar que $A_n = B_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Els nombres $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ s'anomenen *nombres de Catalan*.

► Si considerem $C_0 = 1$, els nombres de Catalan satisfan la recurrència,

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

9. PARTICIONS D'UN ENTER (I)

- Una k -partició d'un enter $n \geq 1$ és una expressió de n com a suma de k enters > 0 sense tenir en compte l'ordre dels sumands.

- ▶ Podem identificar una k -partició de n amb una k -epla (x_1, \dots, x_k) d'enters tals que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 1$ i $n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$.

- ▷ Notació:

$p_k(n)$ és el nombre de k -particions de n

$p(n)$ és el nombre de particions de n

- ▶ Exemples: $(4, 2, 1)$, $(3, 2, 2)$ són 3-particions de 7, ja que $7 = 4 + 2 + 1$, $7 = 3 + 2 + 2$.

9. PARTICIONS D'UN ENTER (II)

- Diagrama de Ferrers: representació de la k -partició de n , (x_1, \dots, x_k) , per mitja de k files amb x_i puntets cadascuna



- La partició conjugada de $x = (x_1, \dots, x_k)$ té per diagrama de Ferrers el que s'obté transposant el diagrama de Ferrers de x .

▷ Notació: x' representa la partició conjugada de x

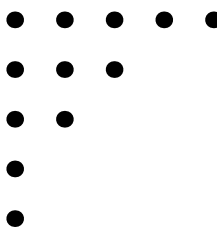


9. PARTICIONS D'UN ENTER (III)

► $x'' = x$

► Si x és una k -partició de n , x' és una partició de n amb la part més gran igual a k .

• Una partició x és autoconjugada si $x' = x$

$$12 = 5 + 3 + 2 + 1 + 1$$


► Una partició és autoconjugada si el diagrama de Ferrers és simètric respecte a la diagonal

9. PARTICIONS D'UN ENTER (IV)

- ▶ El nombre de k -particions de n és igual al nombre de particions de n tals que la part més gran és igual a k
- ▶ El nombre de particions de n en com a molt k parts és igual al nombre de particions de n tals que la part més gran és com a molt k
- ▶ El nombre de particions de n en parts senars diferents és igual al nombre de particions autoconjugades de n
- ▶ El nombre de particions de n en parts senars és igual al nombre de particions de n en parts diferents

10. PRINCIPI D'INCLUSIÓ-EXCLUSIÓ. DESARRANJAMENTS. (I)

• Considerem una família de conjunts finits, A_1, A_2, \dots, A_n . Una k -intersecció de A_1, A_2, \dots, A_n és un conjunt qualsevol de la forma $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ amb $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

▷ Notació: $\alpha_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$. És a dir, α_k és la suma dels cardinals de totes les k -interseccions.

► Principi d'inclusió-exclusió.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \alpha_k$$

10. PRINCIPI D'INCLUSIÓ-EXCLUSIÓ. DESARRANJAMENTS. (II)

• Un desarranjament de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ és qualsevol permutació σ de $[n]$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$.

▷ Notació: $D_n =$ nombre de desarranjaments de $[n]$

► Càlcul.
$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} =$$
$$= n! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) =$$
$$= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

10. PRINCIPI D'INCLUSIÓ-EXCLUSIÓ. DESARRANJAMENTS. (III)

► El nombre d'aplicacions exhaustives $f : A \longrightarrow B$, on $|A| = k$ i $|B| = n$, és $\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k$

• Funció Φ d'Euler: $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida per

$$\Phi(n) = |\{m \mid 1 \leq m \leq n \text{ i } \text{mcd}(m, n) = 1\}|$$

► Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, p_i primers diferents, $\alpha_i \geq 1$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, llavors

$$\Phi(n) = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1) = p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$$

11. DISTRIBUCIONS DE BOLES EN CAPSES (I)

Nombre de distribucions de n boles en k capsas, $n, k \geq 1$, en els casos següents:

n boles	k capsas	sense restriccions	màxim 1 bola per capsa	mín. 1 bola per capsa
num.	num.	k^n	$\begin{cases} k^n, & \text{si } n \leq k \\ 0, & \text{si } n > k \end{cases}$	$k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$
num.	no num	$\sum_{i=1}^k \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$	$\begin{cases} 1, & \text{si } n \leq k \\ 0, & \text{si } n > k \end{cases}$	$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$
no num	num.	$\left(\binom{k}{n} \right) = \binom{k+n-1}{n}$	$\begin{cases} \binom{k}{n}, & \text{si } n \leq k \\ 0, & \text{si } n > k \end{cases}$	$\binom{n-1}{n-k}$
no num	no num	$\sum_{i=1}^k p_i(n)$	$\begin{cases} 1, & \text{si } n \leq k \\ 0, & \text{si } n > k \end{cases}$	$p_k(n)$

11. DISTRIBUCIONS DE BOLES EN CAPSES (II)

► El nombre de maneres de distribuir n boles numerades en k capsas numerades de forma que,

▷ la capsa núm. 1 contingui exactament n_1 boles,

▷ la capsa núm. 2 contingui exactament n_2 boles,

...

▷ la capsa núm. k contingui exactament n_k boles,

on $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$,

és el nombre multinomial $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

II. FUNCIONS GENERADORES

1. Sèries formals de potències
2. Funció generadora ordinària
3. Manipulació de funcions generadores
4. Funcions generadores i sèries de potències
5. Nombres binomials generalitzats
6. Successions recurrents
7. Nombres de Catalan
8. Particions d'un enter
9. Funció generadora exponencial
10. Desarranjaments
11. Nombres de Stirling. Nombres de Bell

1. SÈRIES FORMALS DE POTÈNCIES (I)

- *Sèrie formal de potències*: expressió del tipus $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, on x és una indeterminada i $a_n \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0$

▷ Operacions amb sèries formals de potències.

Si $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ i $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$:

- Suma: $A(x) + B(x) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$
- Producte per un escalar, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha A(x) = \sum_{n \geq 0} (\alpha a_n) x^n$

1. SÈRIES FORMALS DE POTÈNCIES (II)

• Producte: $A(x)B(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n$, on $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$

• Inversa de $A(x)$: és una sèrie de potències $G(x) = \sum_{n \geq 0} g_n x^n$

tal que $A(x)G(x) = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

▷ Si $G(x)$ és la inversa de $A(x)$, escriurem $A(x) = \frac{1}{G(x)}$

▶ La sèrie $A(x)$ és inversible si, i només si, $a_0 \neq 0$

▶ La sèrie de potències inversa de $\sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ és

$1 - x$. És a dir, $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1 - x}$

2. FUNCIO GENERADORA ORDINÀRIA (I)

- La *funció generadora ordinària* de la successió $(a_n)_{n \geq 0}$ és la sèrie formal de potències $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

▷ Exemples:

- $\sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ és la funció generadora ordinària de $(1, 1, 1, \dots)$

- $(1+x)^k$ és la funció generadora ordinària de

$$\left(\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{k}, 0, 0, \dots \right) = \left(\binom{k}{n} \right)_{n \geq 0}$$

3. MANIPULACIÓ DE FUNCIONS GENERADORES (I)

Si $A(x)$ i $B(x)$ són les funcions generadores de les successions $(a_n)_{n \geq 0}$ i $(b_n)_{n \geq 0}$ respectivament i $\alpha \in \mathbb{R}$,

► $A(x) + B(x)$ és la funció generadora de $(a_n + b_n)_{n \geq 0}$

► $\alpha A(x)$ és la funció generadora de $(\alpha a_n)_{n \geq 0}$

► $x^m A(x) = \sum_{n \geq m} a_{n-m} x^n$ és la funció generadora de $(\overbrace{0, \dots, 0}^m, a_0, a_1, \dots)$

► $(A(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{m-1} x^{m-1}) / x^m = \sum_{n \geq 0} a_{n+m} x^n$ és la funció generadora de $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$

3. MANIPULACIÓ DE FUNCIONS GENERADORES (II)

- ▶ $A(\alpha x)$ és la funció generadora de $(\alpha^n a_n)_{n \geq 0} = (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$
- ▶ $A(x^m)$ és la funció generadora de $(a_0, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-1}, a_1, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-1}, a_2, 0, \dots)$
- ▶ $A'(x)$ és la funció generadora de $((n+1)a_{n+1})_{n \geq 0} = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$
- ▶ $\int_0^x A(t) dt$ és la funció generadora de $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \dots)$
- ▶ $A(x)B(x)$ és la funció generadora de $(c_n)_{n \geq 0}$,
on $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$
- ▶ $A(x)/(1-x)$ és la funció generadora de $(s_n)_{n \geq 0}$,
on $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

4. FUNCIONS GENERADORES I SÈRIES DE POTÈNCIES

► Si $(a_n)_{n \geq 0}$ és una successió de nombres reals tals que $|a_n| \leq k^n$, per a tot $n \geq 1$, llavors la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

convergeix per a tot $x \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ i la seva suma és una funció

$A : \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existeixen les derivades n -èsimes en 0 i $a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$

► Recíprocament, si $A : \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció tal que les derivades $A^{(n)}(0)$ existeixen $\forall n \geq 0$, i definim $a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$,

llavors $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

5. NOMBRES BINOMIALS GENERALITZATS (I)

- Si $r \in \mathbb{R}$ i n és un natural, definim
$$\binom{r}{n} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{n}}}{n!} & , \text{ si } n \geq 1 \\ 1 & , \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

on $r^{\underline{n}} = \overbrace{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}^{n \text{ factors}}$

- ▶ Teorema del binomi generalitzat. $(1+x)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} x^n$

- ▶ Generalització. $(1+ax)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} a^n x^n$

- ▶ Conseqüència.

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{n} x^n = \sum_{n \geq 0} \binom{m+n-1}{m-1} x^n$$

5. NOMBRES BINOMIALS GENERALITZATS (II)

► Casos particulars.

$$\text{Si } m = 1 \text{ obtenim } \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

$$\text{Si } m = 2 \text{ obtenim } \sum_{n \geq 0} (n + 1)x^n = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

$$\text{De la igualtat anterior deduïm } \sum_{n \geq 0} n x^n = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

6. SUCCESSIONS RECURRENTS (I)

• Una successió $(a_n)_{n \geq n_0}$ és *recurrent* si, llevat dels primers termes, a_n es pot obtenir en funció de n i els termes anteriors. És a dir, es satisfà una *equació recurrent*, $a_n = f(a_{n_0}, \dots, a_{n-1}, n)$, per a tot $n \geq m$

▷ Exemples d'equacions recurrents.

- $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + 3n$

- $a_n = a_{n-1}/a_{n-3} + a_{n-5}^2$

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

- Els nombres de Catalan satisfan l'equació recurrent

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0, \quad n \geq 2$$

6. SUCCESSIONS RECURRENTS (II)

- Una successió $(a_n)_{n \geq n_0}$ és recurrent d'ordre k si $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$, per a $n \geq m$

► Una successió $(a_n)_{n \geq n_0}$ recurrent d'ordre k queda determinada al conèixer:

- Els k primers termes, $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_0+k-1}$
- L'equació recurrent, $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n)$, si $n \geq n_0 + k$

6. SUCCESSIONS RECURRENTS (III)

Resolució de successions recurrents: trobar el terme general d'una successió recurrent coneguts l'equació recurrent i els primers termes

- Mètode d'inducció. Conjecturar una solució i demostrar-la per inducció
- Mètode d'expansió. Aplicar repetidament l'equació recurrent fins deduir el terme general
- Funcions generadores. Trobar la funció generadora de la successió a partir de l'equació recurrent i manipulacions de funcions generadores, i deduir-ne el terme general

6. SUCCESSIONS RECURRENENTS (IV)

- Una successió és *recurrent lineal amb coeficients constants* d'ordre k si satisfà una recurrència de tipus

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)$$

on c_i són constants per a tot $i \in \{1, \dots, k\}$. Direm que és *homogènia* si $f(n) = 0$ i *no homogènia* si $f(n) \neq 0$

- Per a les successions recurrents lineals amb coeficients constants hi ha un mètode específic de resolució.

7. NOMBRES DE CATALAN

La successió dels nombres de Catalan, $(c_n)_{n \geq 0}$, satisfà:

$$c_0 = 1$$

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \cdots + c_n c_0, \text{ per a tot } n \geq 0$$

Per tant, la funció generadora dels nombres de Catalan, $C(x)$, satisfà $(C(x) - 1)/x = C(x)^2$, és a dir, $x C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$,

$$\text{d'on es dedueix } C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Apliquem el teorema del binomi generalitzat a $(1 - 4x)^{1/2}$, i per ser els nombres de Catalan enters positius deduïm

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

$$\text{i per tant, } c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

8. PARTICIONS D'UN ENTER (I)

► La funció generadora del nombre de particions, $p(n)$, d'un enter n és, si considerem $p(0) = 1$:

$$P(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}$$

► La funció generadora del nombre de particions d'un enter n tal que $n \leq m$ és:

$$P_{n \leq m}(x) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - x^i}$$

► La funció generadora del nombre de particions d'un enter n en parts $\leq k$ és:

$$P_{\leq k}(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x^i}$$

8. PARTICIONS D'UN ENTER (II)

► La funció generadora del nombre de particions d'un enter n en parts diferents és:

$$P_d(x) = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i)$$

► La funció generadora del nombre de particions d'un enter n en parts senars és:

$$P_s(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^{2i-1}}$$

► La funció generadora del nombre de particions d'un enter n en parts parelles és:

$$P_p(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^{2i}}$$

► El nombre de particions de n en parts diferents és igual al nombre de particions de n en parts senars

9. FUNCIÓ GENERADORA EXPONENCIAL (I)

- La *funció generadora exponencial* de la successió $(a_n)_{n \geq 0}$ és la sèrie formal de potències

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$$

▷ Exemples (I)

- La f.g.e. de la successió $(1, 1, 1, \dots)$ és $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- La f.g.e. de la successió $(1, m, m(m-1), \dots) = (m^n)_{n \geq 0}$ és $(1+x)^m$
- La f.g.e. de la successió $(n!)_{n \geq 0}$ és $\frac{1}{1-x}$

9. FUNCIÓ GENERADORA EXPONENCIAL (II)

▷ Exemples (II)

- $\frac{1}{1-x}$ és la f.g.o. de $(1, 1, \dots)$ i la f.g.e. de $(n!)_{n \geq 0}$
- $(1+x)^m$ és la f.g.o. de $(C(m, n))_{n \geq 0} = \left(\binom{m}{n} \right)_{n \geq 0}$ i la f.g.e. de $(P(m, n))_{n \geq 0} = (m^n)_{n \geq 0}$
- e^x és la f.g.o de $\left(\frac{1}{n!} \right)_{n \geq 0}$ i la f.g.e. de $(1, 1, \dots)$

9. FUNCIÓ GENERADORA EXPONENCIAL (III): MANIPULACIÓ

Si $A(x)$ és la f.g.e. de la successió $(a_n)_{n \geq 0}$, $B(x)$ és la f.g.e. de la successió $(b_n)_{n \geq 0}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$,

▶ $A(x) + B(x)$ és la f.g.e. de $(a_n + b_n)_{n \geq 0}$

▶ $\alpha A(x)$ és la f.g.e. de $(\alpha a_n)_{n \geq 0}$

▶ $A'(x)$ és la f.g.e. de $(a_{n+1})_{n \geq 0}$

▶ $x A(x)$ és la f.g.e. de $(n a_{n-1})_{n \geq 1}$

▶ $A(x)B(x)$ és la f.g.e. de $(c_n)_{n \geq 0}$ on $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$

10. DESARRANJAMENTS (I)

• Un *desarranjament* és una permutació σ de $[n]$ tal que $\sigma(i) \neq i$ per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$

▷ Definim $d_n =$ nombre de desarranjaments de $[n]$, si $n \geq 1$, i $d_0 = 1$.

▶ $d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2})$, si $n \geq 2$

▶ $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$

10. DESARRANJAMENTS (II)

► Si $D(x)$ és la f.g.e. de $(d_n)_{n \geq 0}$, per ser e^x la f.g.e. de $(1, 1, 1, \dots)$, de la propietat anterior es dedueix que $e^x D(x)$ és la f.g.e. de $(n!)_{n \geq 0}$, és a dir, $e^x D(x) = \frac{1}{1-x}$. Per tant:

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

► $d_n = \left(\text{coeficient de } \frac{x^n}{n!} \text{ en } D(x) \right) =$

$$= n! \times \left(\text{coeficient de } x^n \text{ en } D(x) \right) =$$

$$= n! \times \left(\text{coeficient de } x^n \text{ en } \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right) \right) =$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

11. NOMBRES DE STIRLING I DE BELL (I)

- Nombres de Stirling de segon tipus: $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} =$ nombre de k -particions de $[n]$

► $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\},$ si $2 \leq k \leq n$

- La f.g.o. dels nombres de Stirling és, fixat k ,

$$S_k(x) = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n$$

► $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = \frac{x}{1-x}$

► $S_k(x) = \frac{x^k}{(1-kx) \cdots (1-2x)(1-x)} = \frac{x^k}{\prod_{i=1}^k (1-ix)}$

11. NOMBRES DE STIRLING I DE BELL (II)

$$\blacktriangleright \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

• Nombres de Bell:

$$B_n = \text{nombre de particions de } [n] = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

$$\blacktriangleright B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

► Si $B(x)$ és la f.g.e. de $(B_n)_{n \geq 0}$, per la propietat anterior $e^x B(x)$ és la f.g.e. de $(B_{n+1})_{n \geq 0}$, però la f.g.e. d'aquesta successió és $B'(x)$. Per tant, $e^x B(x) = B'(x)$, d'on es dedueix:

$$B(x) = e^{(e^x - 1)}$$

A1. NOMBRE DE SOLUCIONS ENTERES D'UNA EQUACIÓ

1. Problema a resoldre
2. Cas (a): cap restricció addicional
3. Cas (b1): $\wedge(x_i \geq r_i)$
4. Cas (b2): $\vee(x_i \geq r_i)$
5. Cas (c1): $\vee(x_i \leq r_i)$
6. Cas (c2): $\wedge(x_i \leq r_i)$
7. Cas (d1): $\wedge(r_i \leq x_i \leq s_i)$
8. Cas (d2): $\vee(r_i \leq x_i \leq s_i)$
9. Resum de casos

1. PROBLEMA A RESOLDRE

Equació: $x_1 + \dots + x_n = r$, on n, r són enters positius.

Solucions: n -eples (x_1, x_2, \dots, x_n) d'enters ≥ 0 que satisfan l'equació.

Observacions: Dues solucions (x_1, x_2, \dots, x_n) , (y_1, y_2, \dots, y_n) són iguals si, i només si, $x_i = y_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$.

Exemple: $(1, 3, 5)$, $(3, 1, 5)$ són dues solucions diferents de l'equació $x_1 + x_2 + x_3 = 9$.

Nombre de solucions?

Nombre de solucions amb restriccions?

2. CAS (a)

Equació: $x_1 + \cdots + x_n = r$

Nombre de solucions: $\binom{n + r - 1}{r}$

Observacions: Equival a comptar el nombre de r -multiconjunts del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$

EXEMPLE CAS (a)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Nombre de solucions, N :

$$N = \binom{3 + 10 - 1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

3. CAS (b.1)

Equació: $x_1 + \cdots + x_n = r$

Restriccions: $x_1 \geq r_1$ i $x_2 \geq r_2$ i \dots i $x_n \geq r_n$

Nombre de solucions:

$$\binom{n + r - \sum_{i=1}^n r_i - 1}{r - \sum_{i=1}^n r_i}$$

Observacions: r_i pot ser 0.

Cas particular: Per a calcular el nombre de solucions enteres estrictament positives de

l'equació $x_1 + \cdots + x_n = r$, considerem les restriccions $r_1 = \cdots = r_n = 1$. Per tant, $\sum_{i=1}^n r_i = n$ i el nombre de solucions és

$$\binom{n + r - n - 1}{r - n} = \binom{r - 1}{r - n}$$

3. EXEMPLE CAS (b.1)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $x \geq 3$ i $y \geq 2$.

Nombre de solucions, N:

$$N = \binom{3 + 10 - (3 + 2) - 1}{10 - (3 + 2)} = \binom{7}{5} = 21$$

Exemple cas particular (b.1)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters > 0

Nombre de solucions, N:

$$N = \binom{10 - 1}{10 - 3} = \binom{9}{7} = 36$$

4. CAS (b.2)

Equació: $x_1 + \cdots + x_n = r$

Restriccions: $x_1 \geq r_1 \text{ ó } x_2 \geq r_2 \text{ ó } \dots \text{ ó } x_n \geq r_n$

Nombre de solucions, N:

Definim per a $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = r, x_i \geq r_i, \}$$

$$N = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

Si apliquem el P.I.E., els sumands que s'obtenen són del tipus $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, i es calculen com en el cas (b.1).

4. EXEMPLE CAS (b.2)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $x \geq 4$ ó $y \geq 5$.

Nombre de solucions, N :

$$A_x = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, x \geq 4\}$$

$$A_y = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, y \geq 5\}$$

$$N = |A_x \cup A_y| = |A_x| + |A_y| - |A_x \cap A_y|, \text{ on:}$$

$$|A_x| = \binom{3 + 10 - 4 - 1}{10 - 4} = \binom{8}{6} = 28$$

$$|A_y| = \binom{3 + 10 - 5 - 1}{10 - 5} = \binom{7}{5} = 21$$

$$|A_x \cap A_y| = \binom{3 + 10 - (4 + 5) - 1}{10 - (4 + 5)} = 3$$

$$\text{Per tant, } N = 28 + 21 - 3 = 46$$

5. CAS (c.1)

Equació: $x_1 + \dots + x_n = r$

Restriccions: $x_1 \leq r_1 \text{ ó } x_2 \leq r_2 \text{ ó } \dots \text{ ó } x_n \leq r_n$

Nombre de solucions, N:

Definim per a $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = r, x_i \geq r_i + 1\}$$

$$\begin{aligned} N &= |A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c| = |(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c| = \\ &= \binom{n+r-1}{r} - |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \end{aligned}$$

on $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$ es calcula com en el cas (b.1)

5. EXEMPLE CAS (c.1)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $x \leq 3$ ó $y \leq 2$.

Nombre de solucions, N :

$$A_x = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, x \geq 4\}$$

$$A_y = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, y \geq 3\}$$

$$N = |(A_x \cap A_y)^c| = \binom{3 + 10 - 1}{10} - |A_x \cap A_y|, \text{ on:}$$

$$|A_x \cap A_y| = \binom{3 + 10 - (4 + 3) - 1}{10 - (4 + 3)} = \binom{5}{3} = 10$$

Per tant, $N = 66 - 10 = 56$

6. CAS (c.2)

Equació: $x_1 + \dots + x_n = r$

Restriccions: $x_1 \leq r_1$ i $x_2 \leq r_2$ i \dots i $x_n \leq r_n$

Nombre de solucions, N:

Definim per a $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = r, x_i \geq r_i + 1\}$$

$$\begin{aligned} N &= |A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c| = \\ &= \binom{n+r-1}{r} - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|, \end{aligned}$$

on $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ es calcula com el cas (b.2)

6. EXEMPLE CAS (c.2)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $x \leq 3$ i $y \leq 2$.

Nombre de solucions, N :

$$A_x = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, x \geq 4\}$$

$$A_y = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, y \geq 3\}$$

$$\begin{aligned} N &= |(A_x \cup A_y)^c| = \binom{3 + 10 - 1}{10} - |A_x \cup A_y| = \\ &= \binom{3 + 10 - 1}{10} - (|A_x| + |A_y| - |A_x \cap A_y|), \text{ on:} \end{aligned}$$

$$|A_x| = \binom{3 + 10 - 4 - 1}{10 - 4} = \binom{8}{6} = 28$$

$$|A_y| = \binom{3 + 10 - 3 - 1}{10 - 3} = \binom{9}{7} = 36$$

$$|A_x \cap A_y| = \binom{3 + 10 - (4 + 3) - 1}{10 - (4 + 3)} = 10$$

$$\text{Per tant, } N = 66 - (28 + 36 - 10) = 12$$

7. CAS (d.1)

Equació: $x_1 + \cdots + x_n = r$

Restriccions: $r_1 \leq x_1 \leq s_1$ i $r_2 \leq x_2 \leq s_2$ i \dots i $r_n \leq x_n \leq s_n$

Nombre de solucions: Si fem $y_i = x_i - r_i$, observem que equival a comptar el nombre de solucions de l'equació

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = r - \sum_{i=1}^n r_i$$

amb les restriccions

$$0 \leq y_i \leq t_i = s_i - r_i, \quad \forall i, i \in \{1, \dots, n\}$$

i procedim com en el cas (c.2).

7. EXEMPLE CAS (d.1)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $1 \leq x \leq 5$ i $2 \leq y \leq 6$.

Nombre de solucions, N :

N = Nombre de solucions de $x' + y' + z' = 10 - 1 - 2 = 7$, tq.
 $x', y', z' \geq 0$, $x' \leq 5 - 1 = 4$ i $y' \leq 6 - 2 = 4$.

$$A'_x = \{(x', y', z') \mid x' + y' + z' = 7, x' \geq 5\}$$

$$A'_y = \{(x', y', z') \mid x' + y' + z' = 7, y' \geq 5\}$$

$$\begin{aligned} N &= |(A'_x \cup A'_y)^c| = \binom{3 + 7 - 1}{7} - |A'_x \cup A'_y| = \\ &= \binom{9}{7} - (|A'_x| + |A'_y| - |A'_x \cap A'_y|), \text{ on:} \end{aligned}$$

$$|A'_x| = |A'_y| = \binom{3 + 7 - 5 - 1}{7 - 5} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|A'_x \cap A'_y| = 0: x', y' \geq 5 \implies x' + y' + z' > 7$$

Per tant, $N = 36 - (6 + 6 - 0) = 24$

8. CAS (d.2)

Equació: $x_1 + \dots + x_n = r$

Restriccions: $r_1 \leq x_1 \leq s_1$ ó $r_2 \leq x_2 \leq s_2$ ó \dots ó $r_n \leq x_n \leq s_n$

Nombre de solucions:

Definim $A_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid r_i \leq x_i \leq s_i\}$,

$$N = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

Apliquem el P.I.E. i cada sumand es calcula com en el cas (d.1).

8. EXEMPLE CAS (d.2) (I)

Equació: $x + y + z = 10$, x, y, z enters ≥ 0

Restriccions: $1 \leq x \leq 5$ ó $2 \leq y \leq 6$.

Nombre de solucions, N :

$$A_x = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, 1 \leq x \leq 5\}$$

$$A_y = \{(x, y, z) | x + y + z = 10, 2 \leq y \leq 6\}$$

$$N = |A_x \cup A_y| = |A_x| + |A_y| - |A_x \cap A_y|, \text{ on:}$$

$$|A_x| = n^\circ \text{ de solucions de } x' + y' + z' = 9, \text{ tq. } x', y', z' \geq 0, x' \leq 4$$

$$|A_y| = n^\circ \text{ de solucions de } x' + y' + z' = 8, \text{ tq. } x', y', z' \geq 0, y' \leq 4$$

$$|A_x \cap A_y| = n^\circ \text{ de solucions de } x' + y' + z' = 7, \text{ tq.}$$

$$x', y', z' \geq 0, x' \leq 4 \text{ i } y' \leq 4$$

8. EXEMPLE CAS (d.2) (II)

Càlcul de $|A_x|$:

definim $B_x = \{(x', y', z') | x' + y' + z' = 9, x', y', z' \geq 0, x' \geq 5\}$,

$$\begin{aligned} |A_x| &= |B_x^c| = \binom{3 + 9 - 1}{9} - |B_x| = \\ &= \binom{11}{9} - \binom{3 + 9 - 5 - 1}{9 - 5} = 55 - 15 = 40 \end{aligned}$$

Càlcul de $|A_y|$:

definim $B_y = \{(x', y', z') | x' + y' + z' = 8, x', y', z' \geq 0, y' \geq 5\}$,

$$\begin{aligned} |A_y| &= |B_y^c| = \binom{3 + 8 - 1}{8} - |B_y| = \\ &= \binom{10}{8} - \binom{3 + 8 - 5 - 1}{8 - 5} = 45 - 10 = 35 \end{aligned}$$

8. EXEMPLE CAS (d.2) (i III)

Càlcul de $|A_x \cap A_y|$: definim

$$F_x = \{(x', y', z') \mid x' + y' + z' = 7, \ x', y', z' \geq 0, \ x' \geq 5\},$$

$$F_y = \{(x', y', z') \mid x' + y' + z' = 7, \ x', y', z' \geq 0, \ y' \geq 5\},$$

$$\begin{aligned} |A_x \cap A_y| &= |(F_x \cup F_y)^c| = \\ &= \binom{3+7-1}{7} - |F_x \cup F_y| = \\ &= \binom{9}{7} - (|F_x| + |F_y| - |F_x \cap F_y|) = 36 - \\ &- \left(\binom{3+7-5-1}{7-5} + \binom{3+7-5-1}{7-5} - 0 \right) = \\ &= 36 - (6 + 6 - 0) = \\ &= 36 - 12 = 24 \end{aligned}$$

$$\text{Resultat final: } N = 40 + 35 - 24 = 51$$

9. RESUM DE CASOS

Observem que els casos (b1), (b2), (c1), (c2), (d1) i (d2) es poden reduir a casos anteriors utilitzant:

- Canvi de variables (c.v.)
- Principi d'inclusió-exclusió (P.I.E.)
- Càlcul del complementari (compl.)

CAS	RESTRICCIONS	REDUIR A	AMB
(b1)	$\bigwedge(x_i \geq r_i)$	(a)	c.v.
(b2)	$\bigvee(x_i \geq r_i)$	(b1)	P.I.E.
(c1)	$\bigvee(x_i \leq r_i)$	(b1)	compl.
(c2)	$\bigwedge(x_i \leq r_i)$	(b2)	compl.
(d1)	$\bigwedge(r_i \leq x_i \leq s_i)$	(c2)	c.v.
(d2)	$\bigvee(r_i \leq x_i \leq s_i)$	(d1)	P.I.E.

A2. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS RECURRENENTS LINEALS A COEFICIENTS CONSTANTS

1. Successions recurrents lineals a coeficients constants (r.l.c.)
2. Resolució de successions r.l.c. homogènies
3. Exemples de successions r.l.c. homogènies
4. Resolució de successions r.l.c. no homogènies
5. Exemples de successions r.l.c. no homogènies

1. SUCCESSIONS RECURRENENTS LINEALS A COEFICIENTS CONSTANTS (R.L.C.)

- Successió recurrent lineal a coeficients constants: equació recurrent de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n$$

on les c_i són constants.

- S'anomena *homogènia* si $b_n = 0$.

2. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS R.L.C. HOMOGÈNIES (I)

- Equació recurrent:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

- Valors inicials: $a_{n_0-1}, a_{n_0-2}, \dots, a_{n_0-k}$ (**)

Equació característica:

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \dots + c_{k-1} x + c_k$$

Arrels de l'equació característica:

$$\begin{aligned} x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k &= 0 \iff \\ \iff (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_r)^{m_r} &= 0 \end{aligned}$$

- ▶ λ_i arrel de multiplicitat m_i , $\forall i = 1, \dots, r$
- ▶ $\sum_{i=1}^r m_i = k$ (= ordre de l'eq. recurrent)

2. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS R.L.C. HOMOGÈNIES (II)

Solucions de (*):

- Si totes les arrels són diferents:

Eq. caract. : $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k) = 0$,
amb $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ diferents.

Solucions: $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \dots + \alpha_k \lambda_k^n$,

- Si hi ha arrels repetides:

Eq. característica: $(x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_r)^{m_r} = 0$
amb $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ diferents

Solucions: $a_n = p_1(n) \lambda_1^n + \dots + p_r(n) \lambda_r^n$,
on $p_i(n)$ és un polinomi en n de grau $m_i - 1$.

Solució de (*) i (**): determinar les k constants que queden a partir dels k valors inicials.

3. EXEMPLE 1

$$a_n = -2a_{n-1} + 5a_{n-2} + 6a_{n-3}, \forall n \geq 3 \quad (*)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1 \quad (**)$$

Equació característica: $x^3 = -2x^2 + 5x + 6$

Arrels: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \iff$

$$(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 0 \iff x = 2, -1, -3$$

Solucions de (*): $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n + \alpha_3 (-3)^n$

Valors inicials: $a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$

$$a_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 1$$

$$a_2 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + 9\alpha_3 = 1$$

Solució del sistema: $\alpha_1 = 8/15, \alpha_2 = 2/3, \alpha_3 = -1/5,$

Solució de (*) i (**): $a_n = \frac{8}{15}2^n + \frac{2}{3}(-1)^n - \frac{1}{5}(-3)^n$

3. EXEMPLE 2 (I)

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - 18a_{n-3} + 27a_{n-4} + 27a_{n-5}, \forall n \geq 5 \quad (*)$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = 1 \quad (**)$$

Equació característica:

$$x^5 = 7x^4 - 10x^3 - 18x^2 + 27x + 27$$

Arrels: $x^5 - 7x^4 + 10x^3 + 18x^2 - 27x - 27 = 0 \iff$

$$(x - 3)^3(x + 1)^2 = 0 \implies$$

3 és arrel de multiplicitat 3 i -1 és arrel de multiplicitat 2.

Solucions de (*):

$$\begin{aligned} a_n &= p_1(n)3^n + p_2(n)(-1)^n = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2)3^n + (\beta_1 + \beta_2 n)(-1)^n \end{aligned}$$

3. EXEMPLE 2 (i II)

Valors inicials:

$$a_0 = \alpha_1 + \beta_1 = 0$$

$$a_1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 = 1$$

$$a_2 = 9\alpha_1 + 18\alpha_2 + 36\alpha_3 + \beta_1 + 2\beta_2 = -1$$

$$a_3 = 27\alpha_1 + 81\alpha_2 + 243\alpha_3 - \beta_1 - 3\beta_2 = 0$$

$$a_4 = 81\alpha_1 + 324\alpha_2 + 1296\alpha_3 + \beta_1 + 4\beta_2 = 1$$

Solució del sistema: $\alpha_1 = 93/256, \alpha_2 = -7/24,$
 $\alpha_3 = 5/96, \beta_1 = -93/256, \beta_2 = -17/65,$

Solució de (*) i (**):

$$a_n = \left(\frac{93}{256} - \frac{7}{24}n + \frac{5}{96}n^2 \right) 3^n + \left(-\frac{93}{256} - \frac{17}{64}n \right) (-1)^n$$

3. EXEMPLE 3: SUCESSIÓ DE FIBONACCI

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \quad (*)$$

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (**)$$

Equació característica: $x^2 = x + 1$

$$\text{Arrels: } x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Anomenem } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Solucions de (*): $a_n = \alpha r^n + \beta s^n$

$$\text{Valors inicials: } a_0 = \alpha + \beta = 0$$

$$a_1 = \alpha r + \beta s = 1$$

Solució del sistema: $\alpha = 1/\sqrt{5}, \beta = -1/\sqrt{5},$

$$\text{Solució de (*) i (**): } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

4. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS R.L.C. NO HOMOGÈNIES (I)

- Equació recurrent:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b_n, \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

- Valors inicials: $a_{n_0-1}, a_{n_0-2}, \dots, a_{n_0-k}$ (**)

Solucions de (*): $a_n = h_n + p_n$, on

- $(h_n)_n$ és la solució general de l'equació recurrent homogènia associada, $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$
- $(p_n)_n$ és una solució particular de l'equació recurrent NO homogènia (*)

4. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS R.L.C. NO HOMOGÈNIES (i II)

Càlcul de $(h_n)_n$: Resolució d'una recurrència lineal a coeficients constants homogènia

Càlcul de $(p_n)_n$: Si $q(x) = 0$ és l'equació característica de l'equació recurrent homogènia associada,

- Si $b_n = P_t(n) r^n$, $q(r) \neq 0$: $p_n = \tilde{P}_t(n) r^n$

- Si $b_n = P_t(n) r^n$, r arrel de $q(x)$ de multiplicitat m :
 $p_n = \tilde{P}_t(n) n^m r^n$

on $P_t(n)$ representa un polinomi concret en n de grau t i $\tilde{P}_t(n)$ un polinomi en n de grau t amb coeficients a determinar.

4. RESOLUCIÓ DE SUCCESSIONS R.L.C. NO HOMOGÈNIES

- Si b_n és suma de termes com els anteriors:
 p_n és suma de solucions com les anteriors

Càlcul dels coeficients pendents de p_n :

Imposar que p_n satisfà l'equació recurrent NO homogènia (*)

Solució de (*) i ():** determinar amb els k valors inicials les k constants que apareixen a la part h_n de les solucions $a_n = h_n + p_n$ de l'equació recurrent no homogènia (*) trobades.

5. EXEMPLE 1 (I)

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 8a_n + n, \forall n \geq 0 (*)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 0 (**)$$

Solucions de (*): $a_n = h_n + p_n$

Càlcul de h_n :

- Equació recurrent homogènia: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 8a_n$
- Equació característica: $q(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$
- Arrels: $x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x - 4)(x + 2) = 0 \iff x = 4, -2$
- **Solucions:** $h_n = \alpha_1 4^n + \alpha_2 (-2)^n$

5. EXEMPLE 1 (II)

Càlcul de p_n :

- Equació característica de la rec. homogènia:

$$q(x) = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) = 0$$

- $b_n = n = n 1^n$, $q(1) \neq 0 \longrightarrow p_n = (\beta_1 + \beta_2 n) 1^n \longrightarrow p_n = \beta_1 + \beta_2 n$

- p_n ha de satisfer (*): $p_{n+2} = 2p_{n+1} + 8p_n + n$
 $\iff \beta_1 + \beta_2(n+2) = 2(\beta_1 + \beta_2(n+1)) + 8(\beta_1 + \beta_2 n) + n \iff$
 $(-9\beta_2 - 1)n + (-9\beta_1) = 0 \iff \beta_1 = 0, \beta_2 = -1/9$

- **Solució:** $p_n = -\frac{1}{9}n$

5. EXEMPLE 1 (i III)

Solucions de (*):

$$a_n = h_n + p_n = \alpha_1 4^n + \alpha_2 (-2)^n - \frac{1}{9}n$$

Valors inicials:

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$a_1 = 4\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1/9 = 0$$

Solució del sistema: $\alpha_1 = 19/54$, $\alpha_2 = 35/54$

Solució de (*) i (**):

$$a_n = \frac{19}{54}4^n + \frac{35}{54}(-2)^n - \frac{1}{9}n$$

5. EXEMPLE 2 (I)

$$a_n = a_{n-1} + n^2, \forall n \geq 2 (*)$$

$$a_1 = 1 (**)$$

Solucions de (*): $a_n = h_n + p_n$

Càlcul de h_n :

- Equació recurrent homogènia: $a_n = a_{n-1}$
- Equació característica: $q(x) = x - 1 = 0$
- Arrels: 1 de multiplicitat 1
- **Solucions:** $h_n = \alpha 1^n = \alpha$

5. EXEMPLE 2 (II)

Càlcul de p_n :

- Equació característica de la rec. homogènia: $q(x) = x - 1 = 0$

- $b_n = n^2 = n^2 1^n$,

1 arrel de multiplicitat 1 de $q(x) \longrightarrow p_n = (\beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2) n 1^n \longrightarrow$
 $p_n = \beta_1 n + \beta_2 n^2 + \beta_3 n^3$

- p_n ha de satisfer (*): $p_n = p_{n-1} + n^2 \iff$

$$\beta_1 n + \beta_2 n^2 + \beta_3 n^3 = \beta_1 (n-1) + \beta_2 (n-1)^2 + \beta_3 (n-1)^3 + n^2 \iff$$

$$(1 - 3\beta_3) n^2 + (3\beta_3 - 2\beta_2) n + (-\beta_3 + \beta_2 - \beta_1) = 0, \forall n \iff$$

$$1 - 3\beta_3 = 0, 3\beta_3 - 2\beta_2 = 0, -\beta_3 + \beta_2 - \beta_1 = 0 \iff$$

$$\beta_3 = 1/3, \beta_2 = 1/2, \beta_1 = 1/6$$

- **Solució:** $p_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$

5. EXEMPLE 2 (i III)

Solucions de (*):

$$a_n = h_n + p_n = \alpha + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

Valors inicials:

$$a_1 = \alpha + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \implies \alpha = 0$$

Solució de (*) i (**):

$$a_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

5. EXEMPLE 3 (I)

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n - 1, \forall n \geq 2 (*)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 2 (**)$$

Solucions de (*): $a_n = h_n + p_n$

Càlcul de h_n :

- Equació recurrent homogènia: $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$
- Equació característica: $q(x) = x^2 + x - 6 = 0$
- Arrels: $x^2 + x - 6 = 0 \iff (x - 2)(x + 3) = 0 \iff x = 2, -3$
- **Solucions:** $h_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-3)^n$

5. EXEMPLE 3 (II)

Càlcul de p_n :

- Equació característica de la rec. homogènia: $q(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) = 0$

- $b_n = 2^n - 1 = 2^n + (-1)1^n$,
2 arrel de multiplicitat 1 de $q(x)$
1 no és arrel de $q(x)$ } \implies
 $p_n = \beta_1 n 2^n + \beta_2 1^n = \beta_1 n 2^n + \beta_2$

- p_n ha de satisfer (*): $p_n = -p_{n-1} + 6p_{n-2} + 2^n - 1 \iff$
 $\beta_1 n 2^n + \beta_2 = -(\beta_1 (n - 1) 2^{n-1} + \beta_2) + 6(\beta_1 (n - 2) 2^{n-2} + \beta_2) + 2^n - 1 \iff$
 $2^{n-2}(10\beta_1 - 4) + (-4\beta_2 + 1) = 0 \iff$
 $10\beta_1 - 4 = 0, -4\beta_2 + 1 = 0 \iff \beta_1 = 2/5, \beta_2 = 1/4$

- **Solució:** $p_n = \frac{2}{5} n 2^n + \frac{1}{4}$

5. EXEMPLE 3 (i III)

Solucions de (*):

$$a_n = h_n + p_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-3)^n + \frac{2}{5} n 2^n + \frac{1}{4}$$

Valors inicials:

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + 1/4 = 1$$

$$a_1 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 21/20 = 2$$

Solució del sistema: $\alpha_1 = 64/100$, $\alpha_2 = 11/100$

Solució de (*) i (**):

$$a_n = \frac{64}{100} 2^n + \frac{11}{100} (-3)^n + \frac{2}{5} n 2^n + \frac{1}{4}$$