

Facultat de Matemàtiques i Estadística

ÀLGEBRA 1
Diplomatura d'Estadística
Curs 2001-2002

Mercè Mora
Carles Seara

Barcelona, setembre 2001

Pròleg

Aquest text és el fruit de l'experiència docent dels autors que des de fa uns anys impartim les assignatures d'Àlgebra 1 i Àlgebra 2 a la Diplomatura d'Estadística de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Malgrat la proliferació de llibres de text sobre la matèria els autors trobem necessari disposar d'un text que s'ajusti als continguts i necessitats específiques de la Diplomatura d'Estadística. Altre condicionant és la diversitat de la procedència dels alumnes que accedeixen a aquests estudis. Això, ens obliga a que els continguts i la forma d'exposar-los es recolzi molt amb exemples concrets i que la llista de problemes tingui un contingut més pràctic que teòric.

Cada capítol del text conté un breu resum de la teoria que s'explica a classe i a continuació una llista de problemes, alguns del quals es realitzaran a les classes de problemes. El penúltim capítol és una llista de problemes globals per a que l'alumne avalui els seus coneixements i prepari els examens. A l'últim capítol s'inclouen els examens resolts dels últims anys de l'assignatura amb el doble motiu de tenir una col·lecció de problemes resolts i saber quin és el grau de dificultat que l'alumne es pot trobar als exàmens de l'assignatura.

És intenció dels autors actualitzar anualment el text, incloent-hi nous examens resolts, modificant la llista de problemes de forma que sigui més adequada a l'alumne, corregint els errors detectats i posant el temari al dia. D'aquesta manera intentem assolir l'objectiu que l'alumne tingui el manual de l'assignatura que es fa servir a classe.

M. Mora i C. Seara.

Índex

	Pàg.
1. Introducció a la lògica	7
2. Conjunts, relacions i aplicacions	17
3. Estructures algebraiques	29
4. L'àlgebra de les matrius	35
5. Sistemes d'equacions lineals	49
6. Espais vectorials	55
7. Aplicacions lineals	69
8. Determinants	85
9. Exercicis de recapitulació	95
10. Exàmens d'Àlgebra 1	103
BIBLIOGRAFIA	169

1. Introducció a la lògica

Càlcul proposicional

Definició. Una *proposició* és un enunciat que té un sentit lògic i és cert o fals, però no les dues coses alhora.

Representarem les proposicions amb lletres p, q, r, \dots . Si una proposició és certa, direm que pren el valor 1. Si és falsa, pren el valor 0.

Connectius lògics. A partir de proposicions p, q, \dots podem construir noves proposicions utilitzant els *connectius lògics*: obtindrem les proposicions *no* p ($\neg p$); *p i q* ($p \wedge q$); *p ó q* ($p \vee q$); *si p llavors q* ($p \rightarrow q$); *p si, i només si, q* ($p \leftrightarrow q$).

Taules de veritat

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Definició. Una *tautologia* és una proposició que sempre és certa. Una *contradicció* és una proposició que sempre és falsa.

Si una proposició del tipus $p \leftrightarrow q$ és una tautologia, direm que les proposicions p i

q són lògicament equivalents. Ho escriurem $p \Leftrightarrow q$, i en aquest cas podem substituir una proposició per l'altre.

Llista d'equivalències lògiques

1. Idempotència de \wedge i de \vee : $p \Leftrightarrow p \wedge p$, $p \Leftrightarrow p \vee p$.
2. Commutativitat de \wedge i de \vee : $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.
3. Associativitat de \wedge i de \vee : $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.
4. Lleis de De Morgan: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
5. Distributivitat de \wedge i de \vee : $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
6. $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$, $(p \vee 1) \Leftrightarrow 1$.
7. $(p \wedge 0) \Leftrightarrow 0$, $(p \vee 0) \Leftrightarrow p$.
8. $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow 0$, $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow 1$.
9. Doble negació: $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$.
10. Condicional: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
11. Equivalència: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
12. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$.
13. Absurd: $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \Leftrightarrow \neg p$.
14. Contrarecíproc: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Si una proposició del tipus $p \rightarrow q$ és una tautologia, direm que la proposició p implica lògicament la proposició q . Ho escriurem $p \Rightarrow q$ i llavors podem substituir la proposició p per la proposició q .

Llista d'implicacions lògiques

1. Addició: $p \Rightarrow p \vee q$.
2. Simplificació: $p \wedge q \Rightarrow p$.
3. Modus ponens: $[(p \wedge (p \rightarrow q))] \Rightarrow q$.
4. Modus tollens: $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$.
5. Sillogisme disjuntiu: $[\neg p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$.
6. Sillogisme hipotètic: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$.
7. $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.
8. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$.
9. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$.

Càlcul de predicats

Definició. Un predicat o funció lògica de n variables expressa una relació entre variables. El representarem $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on x_1, x_2, \dots, x_n són les variables.

Al substituir les variables per objectes d'un univers de discurs obtenim una proposició.

Quantificadors. Si $p(x)$ és un predicat, $\forall x p(x)$ és una proposició certa si, i només si, el predicat $p(x)$ és cert al substituir la variable x per qualsevol objecte de l'univers de discurs. $\exists x p(x)$ és una proposició certa si, i només si, el predicat $p(x)$ és cert per algun objecte de l'univers de discurs.

Anàlogament podem quantificar un predicat de n variables obtenint un predicat de $n - 1$ variables.

Propietats dels quantificadors

1. $\forall x \forall y p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x, y)$.
2. $\exists x \exists y p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y)$.
3. $\exists y \forall x p(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y p(x, y)$.
4. $\neg(\forall x p(x)) \Leftrightarrow (\exists x) (\neg p(x))$.
5. $\neg(\exists x p(x)) \Leftrightarrow (\forall x) (\neg p(x))$.
6. $(\exists x p(x)) \vee (\exists x q(x)) \Leftrightarrow \exists x (p(x) \vee q(x))$.
7. $(\forall x p(x)) \vee (\forall x q(x)) \Rightarrow \forall x (p(x) \vee q(x))$.
8. $(\forall x) (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\forall x p(x)) \wedge (\forall x q(x))$.
9. $(\exists x) (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x)) \wedge (\exists x q(x))$.
10. $(\forall x) (p(x) \rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists x p(x) \rightarrow \exists x q(x))$.
11. $(\exists x) (p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\forall x p(x) \rightarrow \exists x q(x))$.

Inferència lògica

Definició. Un *teorema* és una proposició certa que es vol demostrar. Una *demostració* és un raonament lògic per tal de comprovar que el teorema és cert.

Una demostració és una seqüència de proposicions p_1, p_2, \dots, p_n , tal que la última proposició p_n és el que es vol demostrar, i cada p_i és una hipòtesi o axioma, o bé es pot

obtenir a partir de les proposicions anteriors p_j , $j < i$, utilitzant una *regla d'inferència*.

Les regles d'inferència les obtenim a partir de les tautologies. Per exemple, per ser la proposició $p \rightarrow (p \vee q)$ una tautologia, si a la seqüència p_1, \dots, p_j hi ha la proposició p , podem afegir la proposició $p \vee q$ en qualsevol moment de la demostració. Per ser $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ una tautologia, si en algun moment de la demostració apareixen les proposicions p i $p \rightarrow q$, podem afegir la proposició q . Per a cada una de les implicacions lògiques, obtindrem una regla d'inferència.

Mètodes de demostració

1. Per demostrar proposicions del tipus:

a) $p \Leftrightarrow q$. Es pot fer buscant proposicions p_1, p_2, \dots, p_n , tals que $p = p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow p_n = q$, o bé demostrant per separat $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$.

b) $p \wedge q$. S'han de demostrar les dues proposicions p i q .

c) $p \vee q$. Es pot fer demostrant que si es satisfà $\neg p$ llavors q ha de ser certa, és a dir, demostrar $\neg p \Rightarrow q$. O bé $\neg q \Rightarrow p$.

d) $p \Rightarrow (q \vee r)$. Demostrar una de les implicacions $p \wedge \neg q \Rightarrow r$ ó $p \wedge \neg r \Rightarrow q$.

e) $p \Rightarrow q$. Es pot demostrar tenint en compte que $p \Rightarrow q$ és equivalent a $\neg p \vee q$ o bé a $\neg q \Rightarrow \neg p$.

2. Reducció a l'absurd.

Demostrar una proposició p és equivalent a demostrar $\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$: si suposant que la proposició $\neg p$ és certa arribem a demostrar una proposició i la seva negació, la proposició p haurà de ser certa, ja que $q \wedge \neg q$ és sempre falsa.

3. Expressions amb quantificadors.

Les proposicions del tipus $\forall x, p(x)$ es poden demostrar veient que $p(x)$ és cert per un x arbitrari. Les del tipus $\exists x, p(x)$, trobant un element que satisfaci $p(x)$. De vegades és útil el mètode de reducció a l'absurd.

4. Inducció matemàtica.

La inducció matemàtica serveix per demostrar propietats relatives a nombres enters a partir d'un cert valor n_0 . Donarem dues versions del *principi d'inducció completa*:

a) Si $p(n)$ representa una propietat que depèn d'un enter n , tal que

i) $p(n_0)$ és certa per un enter n_0 ,

ii) $\forall n \geq n_0$, si $p(n)$ és certa, llavors també ho és $p(n + 1)$,

llavors la propietat $p(n)$ és certa per qualsevol $n \geq n_0$.

La condició ii) d'aquest principi és equivalent a:

$\forall n > n_0$, si $p(n - 1)$ és certa, llavors també ho és $p(n)$

b) Si $p(n)$ representa una propietat que depèn d'un enter n , tal que

i) $p(n_0)$ és certa per un enter n_0 ,

ii) $\forall n > n_0$, si $p(k)$ és certa per qualsevol valor de k , tal que $n_0 \leq k < n$, llavors $p(n)$ és certa,

aleshores la propietat $p(n)$ és certa per qualsevol $n \geq n_0$.

Exercicis

1. Doneu les taules de veritat de les proposicions següents:

- a) $(q \wedge \neg p) \rightarrow p$;
- b) $((p \wedge q) \vee \neg r) \leftrightarrow p$;
- c) $p \vee ((\neg q \wedge r) \rightarrow p)$;
- d) $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \wedge \neg p \wedge q$.

2. Comproveu les tautologies següents utilitzant taules de veritat:

- a) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$;
- b) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \leftrightarrow \neg p$;
- c) $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \leftrightarrow p$.

3. Negueu les proposicions següents:

- a) $(\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
- b) $(\exists x)(p(x) \vee q(x))$;
- c) $(\forall x)(\exists y)(p(x, y) \rightarrow q(x, y))$;
- d) $(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \wedge q(x, y) \rightarrow q(x, y))$.

4. Sigui $S(x, y, z)$ el predicat $x + y = z$, $P(x, y, z)$ el predicat $x \cdot y = z$ i $L(x, y)$ el predicat $x < y$. Considerem \mathbb{N} com a univers de discurs. Fent servir els predicats anteriors, expresseu les afirmacions següents:

- a) per a cada x i y , existeix un z tal que $x + y = z$;
- b) no és cert que x és més petit que 0;
- c) per a tot x , $x + 0 = x$;
- d) per a tot x , $x \cdot y = y$ per a tot y ;
- e) existeix un x tal que $x \cdot y = y$ per a tot y .

5. Considerem com a univers de discurs el conjunt dels nombres enters i denotem per:

$N(x)$, x és un enter no negatiu,

$B(x)$, x és parell,

$S(x)$, x és senar i

$P(x)$, x és primer.

Escriu en notació lògica les afirmacions següents:

- existeix un enter parell;
- tot enter és parell o senar;
- tots els enters primers són no negatius;
- l'únic enter primer i parell es 2;
- existeix un, i només un, enter parell i primer;
- no tots els enters són senars;
- no tots els enters primers són senars;
- si un enter no és senar llavors és parell.

6. Prenent com a univers de discurs el conjunt \mathbb{Z} i representant

$x \cdot y = z$ per $P(x, y, z)$

$x = y$ per $I(x, y)$

$x > y$ per $M(x, y)$

escriu en notació lògica:

- si $y = 1$, llavors $x \cdot y = x$ per a tot x ;
- si $x \cdot y \neq 0$, llavors $x \neq 0$ i $y \neq 0$;
- si $x \cdot y = 0$, llavors $x = 0$ ó $y = 0$;
- $3 \cdot x = 6$ si, i només si, $x = 2$;
- no hi ha solució de $x^2 = y$, excepte per a $y \geq 0$;
- $x < z$ és condició necessària per a que $x < y$ i $y < z$;
- $x \leq y$ i $y \leq x$ és condició suficient per a que $x = y$;
- no pot passar $x = y$ i $x < y$.

7. Utilitzant que els nombres parells són de la forma $2k$, on $k \in \mathbb{Z}$, i els nombres senars $2k + 1$, on $k \in \mathbb{Z}$, demostreu:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \text{ és parell} \iff x \text{ és parell.}$$

8. Definim els nombres perfectes com aquells que coincideixen amb la suma de tots els seus divisors positius llevat d'ell mateix. Per exemple, 28 és perfecte: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ i 12 no ho és: $12 \neq 1 + 2 + 3 + 4 + 6$. Demostreu que un nombre perfecte no és primer.

9. Demostreu que hi ha infinits nombres primers. (Indicació: suposeu que n'hi ha un nombre finit i considereu el producte de tots més 1).

10. Demostreu:

a) $\sqrt{2}$ és irracional;

b) $\sqrt{3}$ és irracional.

11. Demostreu la fórmula per sumar una progressió geomètrica de raó $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

12. Demostreu que les fórmules següents es satisfan per a tot $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

13. Demostreu la igualtat $1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-1)(n-1)! = n!$, per a tot $n > 1$.

14. Demostreu la igualtat $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, per a tot $n \geq 1$.

15. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix el següent:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

16. Demostreu la igualtat següent:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{(1+n)n}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

17. Demostreu que la fórmula $\sum_{k=1}^n k = \frac{(2n+1)^2}{8}$ val per a $n+1$ si val per a n . Per a quins valors de n és vàlida?

18. Si a i n són enters positius, demostreu que $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

19. Demostreu que $e^n \geq n + 1$ per a tot n natural.

20. Demostreu les desigualtats següents:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \quad \forall n \geq 2.$$

21. Si x_1, x_2, \dots, x_n són nombres reals positius, demostreu que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

(Indicació: si a, b són reals positius, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$).

22. Donats dos nombres reals a i b positius demostreu que

$$na^{n-1}b \leq (n-1)a^n + b^n, \quad \text{per a tot } n \geq 1.$$

Indicació: distingiu els casos $a \leq b$ i $b \leq a$.

23. Considereu la proposició $p(n)$: $n^2 + 5n + 1$ és parell.

- Demostreu que $p(n)$ implica $p(n+1)$ per a tot natural n .
- Trobeu els valors de n per als quals és certa $p(n)$.

24. Definim la successió u_n de la manera següent: $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ i $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$, per a tot $n \geq 2$. Demostreu que $u_n = 2^{n+1} - 1$ per a tot $n \geq 0$.

25. Es defineix la successió x_n mitjançant

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \\ x_n &= ax_{n-1} + na^n, \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

on $a \neq 1$ és un nombre real fix. Trobeu una expressió pel terme general x_n i demostreu que l'expressió trobada compleix efectivament les condicions.

26. Siguin α i β dos nombres reals tals que el polinomi $x^2 - \alpha x - \beta$ tingui dues arrels diferents que designarem per r i s . Sigui ara u_n la successió definida per $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ i $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2}$ per a tot $n \geq 2$. Demostreu que

$$u_n = \frac{r^n - s^n}{r - s} \quad \forall n \geq 0.$$

27. Definim $b_0 = b_1 = 1$, $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ per $n \geq 2$. Demostreu que b_n és senar per a tot $n \geq 0$.

28. Definim $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ per $n \geq 3$. Demostreu que $a_n \leq \left(\frac{4}{3}\right)^n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

2. Conjunts, relacions i aplicacions

Conjunts

Un conjunt és una col·lecció d'objectes, que anomenarem *elements*. Utilitzarem la notació $a \in A$ si l'element a és del conjunt A .

Podem definir un conjunt donant cada un dels seus elements, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, o bé donant una propietat $p(x)$ que satisfan els elements del conjunt, $A = \{a \mid p(a)\}$.

Dos conjunts són iguals si tenen exactament els mateixos elements. El conjunt que no té cap element, l'anomenem *buit* i el denotarem per \emptyset . El cardinal d'un conjunt A és el nombre d'elements del conjunt, denotat per $|A|$ o per $\#A$.

Inclusió

Definició. Donats dos conjunts A, B , direm que A està *contingut* en B , o bé A és un subconjunt de B , $A \subset B$, si tots els elements de A ho són també de B , és a dir,

$$A \subset B \iff (\forall x, x \in A \implies x \in B).$$

Propietats. $\forall A, B, C$ conjunts,

1. $A \subset A$;
2. $A \subset B$ i $B \subset A \iff A = B$;
3. $A \subset B$ i $B \subset C \implies A \subset C$;
4. $\emptyset \subset A$.

Definició. Si A és un conjunt, s'anomena *conjunt de les parts de A* el conjunt format per tots els subconjunts de A : $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}$.

Proposició. $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Intersecció i unió

Definició. Donats dos conjunts A, B , definim la *intersecció* de A i B com el conjunt format pels elements que són alhora de A i de B , $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$, i la *unió* com el conjunt format pels elements que són de A o de B , $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$. Dos conjunts A i B són *disjunts* si $A \cap B = \emptyset$.

Propietats. $\forall A, B, C$ conjunts,

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (idempotència);
2. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (commutativitat);
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativitat);
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitat);
5. $A \subset C$ i $B \subset C \iff A \cup B \subset C$;
6. $A \subset B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$;
7. $\emptyset \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;
8. $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$.

Diferència de conjunts. Conjunt complementari

Definició. La *diferència* dels conjunts A i B és el conjunt

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}.$$

Definició. Si $A \subset B$, el *complementari* de A en B és el conjunt $A_B^c = B \setminus A$.

Propietats. Escriurem X^c el complementari de $X \subset U$. $\forall A, B, C \subset U$,

1. $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = U$;
2. $\emptyset^c = U$, $U^c = \emptyset$;
3. $(A^c)^c = A$;
4. $A \subset B \iff B^c \subset A^c$;
5. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

6. $A \setminus B = A \cap B^c$, $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$;
7. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
8. $A \setminus B = B^c \setminus A^c$;
9. $A \setminus B \subset A$, $A \setminus \emptyset = A$, $A \setminus A = \emptyset$;
10. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Partició d'un conjunt

Definició. Una família de conjunts $\{A_i \mid i \in I\}$ és una partició d'un conjunt A si:

1. $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$;
2. $\forall i, j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
3. $A = \cup\{A_i \mid i \in I\}$.

Producte cartesià

Definició. Un *parell ordenat* és un conjunt amb dos elements ordenats: (a, b) .

Dos parells ordenats (a, b) i (a', b') són iguals si i només si $a = a'$ i $b = b'$. Anàlogament es poden definir les *n-ples ordenades* (a_1, a_2, \dots, a_n) i tindrem $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si, i només si, $a_i = b_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Definició. El *producte cartesià* de dos conjunts A, B està format pels parells ordenats (a, b) , on a és un element de A i b és de B : $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ i } b \in B\}$. Anàlogament es pot definir el producte cartesià $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$. Observeu que en general $A \times B \neq B \times A$.

Relacions

Definició. Una *relació* R entre els conjunts A_1, A_2, \dots, A_n és un subconjunt del producte cartesià $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$: $R \in \mathcal{P}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$. Si $n = 2$ direm que la relació és *binària*. Si a més $A_1 = A_2 = A$ la relació és *binària interna*.

Definició. Una relació binària interna en A direm que té la propietat:

reflexiva $\iff \forall a \in A, (a, a) \in R$;

simètrica $\iff \forall a, b \in A, (a, b) \in R \implies (b, a) \in R$;

antisimètrica $\iff \forall a, b \in A, ((a, b) \in R \text{ i } (b, a) \in R \implies a = b)$;

transitiva $\iff \forall a, b, c \in A, ((a, b) \in R \text{ i } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R)$.

Una relació d'*equivalència* és una relació binària interna que té les propietats reflexiva, simètrica i transitiva. Una relació amb les propietats reflexiva, antisimètrica i transitiva direm que és una relació d'*ordre*.

Relacions d'equivalència. Si R és una relació d'equivalència en A , el conjunt $[a] = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$ s'anomena *classe d'equivalència* de a per la relació R . El conjunt de totes les classes d'equivalència formen una partició de A :

1. $\forall a \in A, [a] \neq \emptyset$;
2. $\forall a, b \in A, [a] = [b]$ ó $[a] \cap [b] = \emptyset$;
3. A és la unió de totes les classes d'equivalència, $A = \cup\{[a] \mid a \in A\}$.

El conjunt de totes les classes d'equivalència s'anomena *conjunt quocient*, A/R :

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Aplicacions

Definició. Una *aplicació* f entre dos conjunts A i B és una correspondència que a cada element de A li assigna un element i només un de B . Ho escriurem $f : A \rightarrow B$.

Si f assigna a l'element $a \in A$ l'element $b \in B$, escriurem $f(a) = b$ i direm que b és la *imatge* de a per f , i que a és una *antiimatge* de b per f . Si $A' \subset A$, $f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$. Si $B' \subset B$, $f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$.

Definició. Una aplicació $f : A \rightarrow B$ és *injectiva* si elements diferents de A tenen imatges diferents, *exhaustiva* si tots els elements de B tenen antiimatge per f , i *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva alhora:

f és injectiva $\iff (\forall a, b \in A, a \neq b \implies f(a) \neq f(b))$

f és injectiva $\iff (\forall a, b \in A, f(a) = f(b) \implies a = b)$;

f és exhaustiva $\iff f(A) = B \iff (\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b)$.

Definició. Si $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ són aplicacions, la *composició* de les dues aplicacions $g \circ f : A \rightarrow C$ és l'aplicació tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, per cada $a \in A$.

Propietat. La composició d'aplicacions és associativa.

Definició. L'aplicació *identitat* en A és l'aplicació $I_A : A \rightarrow A$ tal que $I_A(a) = a$, $\forall a \in A$.

Propietat. Si $f : A \rightarrow B$ és una aplicació, $f \circ I_A = f$ i $I_B \circ f = f$.

Definició. L'aplicació $f : A \rightarrow B$ és *inversible* si, i només si, existeix una aplicació $g : B \rightarrow A$, tal que $f \circ g = I_B$ i $g \circ f = I_A$. Direm que g és la inversa de f , i l'escriurem $g = f^{-1}$.

Propietat. $f : A \rightarrow B$ és inversible $\iff f$ és bijectiva.

En cas de ser f bijectiva, f^{-1} és l'aplicació que a l'element $b = f(a)$ li fa correspondre l'element $f^{-1}(b) = a \in A$.

Exercicis

1. Donat $M = \{1, 2, 3, 4\}$, rectifiqueu les incorreccions:

$$\{3\} \in M; \quad \{1, 2, 3, 4\} \subset M; \quad 4 \in \mathcal{P}(M); \quad \emptyset \in \mathcal{P}(M); \quad \{\{4\}\} \in \mathcal{P}(M);$$

$$\{3, 4\} \in \mathcal{P}(M); \quad \emptyset \in \{\emptyset\}; \quad \{\{1\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)).$$

2. Quins dels enunciats següents són certs?

- a) $9 \in \mathbb{Z}$;
- b) $9 \in \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \leq 0\}$;
- c) $\{a, b\} \in \{a, b\}$;
- d) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$;
- e) $(\{a, b\} \cap \{b, c\}) \subset (\{a, b\} \cup \{b, c\})$.

3. Trobeu $\mathbb{Z} \setminus X$ en els exemples següents:

- a) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \geq 0\}$;
- b) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } x \geq 4 \text{ ó } x \leq -3\}$;
- c) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leq x \leq 1\}$;
- d) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } x = 2n \text{ per a cert } n \in \mathbb{Z}\}$.

4. Siguin A i B dos subconjunts no buits d'un conjunt S . Proveu, les anomenades lleis de De Morgan:

- a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
- b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

5. Discutiui la veracitat o falsedat de la igualtat següent

$$[(A \cup B) \cap (B \cap A^c)^c] \cup [(A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c] = A.$$

6. Simplifiqueu:

- a) $A \cap (A^c \cup B)$;
- b) $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B^c)$;
- c) $[A \cap B \cap C] \cup [A^c \cup B^c \cup C^c]$;
- d) $[A \cap (A^c \cup B)] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B$.

7. Siguin A i B conjunts disjunts que satisfan $A \subset (B \cup C)$. Demostreu la igualtat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

8. Illustreu amb un diagrama de Venn els conjunts A , B i D en cas que satisfacin allhora les tres condicions següents:

$$A \cup D \subset B \cup D, \quad A \cap D \neq \emptyset, \quad A \setminus B \neq \emptyset.$$

9. Demostreu les igualtats següents:

- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
- $B \setminus A = B \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \setminus A$;
- $A \cap (A \cup B) = A$.

10. Definim la diferència simètrica de dos conjunts A , B com $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Proveu que el complementari de la diferència simètrica de dos conjunts és la diferència simètrica del complementari d'un d'ells amb l'altre.

11. Determineu $\mathcal{P}(A)$ quan $A = \{a, b, c, d\}$.

12. a) Si A és unitari, escriuiu $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$.

b) Si E té dos elements, escriuiu $\mathcal{P}(E)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

13. Proveu que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. És certa l'altra inclusió?

14. Demostreu:

- $A \subset B \implies \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$;
- $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B$.

15. Si $\mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$ té 8 elements, proveu que A és unitari. És cert el recíproc?

16. És cert, en general, que $A \times B = B \times A$, on A i B són dos conjunts no buits?

17. Proveu:

- a) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
- b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
- c) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$.

18. Es consideren a \mathbb{N} les relacions donades per:

$$\text{a) } x + y = 10, \quad \text{b) } x \text{ divideix } y, \quad \text{c) } x \text{ és menor que } y.$$

Estudieu les seves propietats.

19. Determineu quines de les relacions següents entre nombres enters són reflexives, simètriques i transitives:

- a) $a \sim b \iff a < b$;
- b) $a \sim b \iff a - b < 2$;
- c) $a \sim b \iff b$ és múltiple de a ;
- d) $a \sim b \iff ab > 0$ ó $a = b = 0$.

20. *Teorema:* tota relació simètrica i transitiva és també reflexiva.

Demostració: Si $x \sim y$, per la propietat simètrica tenim que $y \sim x$. Per transitivitat $x \sim y$ i $y \sim x$, i, per tant, $x \sim x$.

Sabeu trobar el parany de tot això? Us pot ajudar comprovar que a \mathbb{Z} la relació $a \sim b \iff ab > 0$ és simètrica i transitiva, però no és reflexiva.

21. Per a cert $p \in \mathbb{N}$ es defineix en el conjunt $A = \{1, 2, \dots, q\}$ la relació següent:

$$\forall a, b \in A, a R b \iff \text{mcd}(a, p) = \text{mcd}(b, p),$$

- a) proveu que aquesta relació és d'equivalència;
- b) doneu el conjunt quocient A/R per a $q = 13$ i $p = 18$.

22. A $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es defineix la relació:

$$a \sim b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Proveu que \sim és una relació d'equivalència i trobeu els elements de la classe d'equivalència d'un element $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

23. En el conjunt dels segments del pla, es defineix la relació: *dos segments estan relacionats quan pertanyen a una mateixa recta*. Estudieu aquesta relació.

24. Sigui A un conjunt no buit i R la relació definida a $\mathcal{P}(A)$ per

$$A_1 R A_2 \iff A_1 \oplus A_2 \neq \emptyset.$$

Demostreu que aquesta relació és simètrica i no reflexiva.

25. Sigui A el conjunt $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Al conjunt $A \times A$ es defineix la relació $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$. Proveu que és d'equivalència i descriviu el conjunt quocient $(A \times A) / \sim$.

26. Al conjunt \mathbb{N} es defineix la relació $x \sim y \iff \lceil \frac{x}{2} \rceil = \lceil \frac{y}{2} \rceil$ on $\lceil \cdot \rceil$ significa la part entera. Estudieu-ne les propietats.

27. Es defineix a \mathbb{Z} la relació $a \sim b \iff 2a + b = \dot{3}$.

- Proveu que és d'equivalència i trobeu \mathbb{Z} / \sim .
- Comproveu que la relació $a \sim_s b \iff a - b = \dot{3}$ és la mateixa que \sim .
- Feu el mateix problema amb la relació $4a + b = \dot{5}$.

28. Sigui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el subconjunt del pla dels punts amb coordenades enteres. En aquest conjunt es defineix la relació

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a - c = \dot{2} \text{ i } b - d = \dot{3}.$$

- Proveu que és d'equivalència.
- Calculeu el nombre de classes d'equivalència.
- Busqueu un representant de cada classe a distància mínima de l'origen.

29. Sigui A un conjunt diferent del buit i $f : A \rightarrow A$ una aplicació.

- a) Si $f^{-1} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ està definida per $f^{-1}(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$, $\forall X \in \mathcal{P}(A)$, demostreu que $X_1 \subset X_2$ implica que $f^{-1}(X_1) \subset f^{-1}(X_2)$.
- b) Sobre A es defineix la relació d'equivalència $a \sim b \iff f(a) = f(b)$, $\forall a, b \in A$. Demostreu que si $[a] = \{a\}$, $\forall a \in A$ aleshores f és injectiva.

30. En el conjunt \mathbb{C} dels nombres complexos es defineix la relació:

$$a + bi \preceq c + di \iff a < c \vee (a = c \wedge b \leq d).$$

Proveu que és d'ordre. És d'ordre total?

31. Indiqueu quines de les aplicacions següents de \mathbb{Z} a \mathbb{Z} són injectives, exhaustives o bijectives:

- | | |
|---|------------------------|
| a) $f(x) = x + 2$; | b) $f(x) = 4x$; |
| c) $f(x) = 2x^2 + 1$; | d) $f(x) = x^2 - x$; |
| e) $f(x) = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor$; | f) $f(x) = 2x^2 + x$. |

32. Indiqueu quines de les aplicacions següents de \mathbb{R} a \mathbb{R} són injectives, exhaustives o bijectives:

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) $f(x) = x^2$; | b) $f(x) = x^3 - x$; |
| c) $f(x) = 2^x$; | d) $f(x) = x^3$; |
| e) $f(x) = 4x$; | f) $f(x) = 2x^2 + x$. |

33. Siguin A, B dos conjunts amb $A \neq B$. Considereu l'aplicació $f : A \times B \rightarrow B \times A$ definida per $f((a, b)) = (b, a)$. Demostreu que f és una bijecció.

34. Siguin X, Y dos conjunts no buits. Proveu que $f : X \rightarrow Y$ és injectiva si, i només si, existeix $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = I_X$. Proveu que $f : X \rightarrow Y$ és exhaustiva si, i només si, existeix $h : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ h = I_Y$.

35. Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^3$. Existeixen g i h tals que $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ o bé $f \circ h = I_{\mathbb{R}}$?. Trobeu g i h si existeixen.

36. Sigui $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ donada per $f(n) = 2n$. Existeixen g i h tals que $g \circ f = I_{\mathbb{Z}}$ o bé $f \circ h = I_{\mathbb{Z}}$? Trobeu g i h si existeixen.

37. Siguin $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ dues aplicacions i sigui $h = g \circ f$. Proveu:

- f i g injectives $\implies h$ injectiva;
- f i g exhaustives $\implies h$ exhaustiva;
- f i g bijectives $\implies h$ bijectiva, i, a més a més, $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
- h injectiva $\implies f$ injectiva;
- h exhaustiva $\implies g$ exhaustiva;
- h exhaustiva i g injectiva $\implies f$ exhaustiva;
- h injectiva i f exhaustiva $\implies g$ injectiva.

38. Siguin $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow T$ aplicacions tals que $g \circ f$ i $h \circ g$ són bijectives. Proveu que f , g i h són bijectives (utilitzeu el problema anterior).

39. Sigui $f: X \rightarrow Y$ una aplicació. Siguin $A, B \subset X$ i $C, D \subset Y$. Demostreu:

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
- $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$;
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
- $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$;
- $A \subset f^{-1}(f(A))$;
- $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

40. Amb la notació del problema anterior, si f és injectiva, demostreu que a més de les propietats anteriors es compleix:

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
- $A = f^{-1}(f(A))$;
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

41. Amb la notació dels problemes anteriors, si f és exhaustiva demostreu que es compleix

$$C = f(f^{-1}(C)).$$

42. Donada $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ per $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, calculeu $f(A)$, $f^2(A)$ i $f^{-1}(A)$ en els casos següents:

$$a) \ A = [2, 3]; \quad b) \ A = [0, 3]; \quad c) \ A = [1, +\infty]; \quad d) \ A = (-\infty, -9).$$

43. Sigui A un conjunt. Definim l'aplicació $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ per $f(B) = A \setminus B$, per a qualsevol $B \in \mathcal{P}(A)$.

- a) Demostreu que f és una bijecció.
- b) Trobeu la seva inversa.

3. Estructures algebraiques

Operacions

Definició. Una *operació binària* és una aplicació $f : A \times B \rightarrow C$. Si $A = B = C$ l'operació és *interna*.

Per tant, una operació binària interna en A assigna a cada parell d'elements de A , (a, b) , un altre element de A , $f(a, b) \in A$. Per exemple, la suma de naturals és una aplicació $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que assigna a cada dos naturals m, n , un altre natural $f(m, n) = m + n$, que és la suma dels dos.

Definició. Una operació binària interna

$$\begin{aligned} \otimes : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow a \otimes b \end{aligned}$$

té la propietat:

- 1) *associativa* $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A, a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$;
- 2) *commutativa* $\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a \otimes b = b \otimes a$;
- 3) l'element $e \in A$ és *element neutre* $\Leftrightarrow \forall a \in A, a \otimes e = e \otimes a = a$;
- 4) si $e \in A$ és element neutre, i $a \in A$,

$$a \text{ és inversible} \Leftrightarrow \exists a^{-1} \in A, a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e.$$

Si l'operació és la suma, l'element invers de a s'anomena *element simètric* i s'escriu $-a$.

Si tenim dues operacions $\oplus : A \times A \rightarrow A, \otimes : A \times A \rightarrow A$, direm que \otimes és *distributiva* respecte a \oplus si, i només si,

$$\forall a, b, c \in A, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \quad \text{i} \quad (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).$$

Estructura d'un conjunt amb una operació binària interna

Definició. Un conjunt A amb una operació binària interna $\otimes : A \times A \rightarrow A$, (A, \otimes) , direm que és:

semigrup $\Leftrightarrow \otimes$ és associativa;

monoide $\Leftrightarrow \begin{cases} \otimes \text{ és associativa} \\ \text{existeix element neutre, } e \in A; \end{cases}$

grup $\Leftrightarrow \begin{cases} \otimes \text{ és associativa} \\ \text{existeix element neutre, } e \in A \\ \forall a \in A, a \text{ és inversible;} \end{cases}$

grup abelià o commutatiu $\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \otimes) \text{ és grup} \\ \otimes \text{ és commutativa;} \end{cases}$

Definició. Sigui (A, \otimes) un grup i sigui H un subconjunt no buit de A . Direm que (H, \otimes) és un *subgrup* de A si:

1. $\forall a, b \in H \Rightarrow a \otimes b \in H$,
2. $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Si $H \neq A$, $H \neq \{e\}$, es diu que (H, \otimes) és un *subgrup propi* de (A, \otimes) .

Estructura d'un conjunt amb dues operacions binàries internes

Definició. Un conjunt A amb dues operacions binàries internes $\oplus : A \times A \rightarrow A$ i $\otimes : A \times A \rightarrow A$, (A, \oplus, \otimes) , direm que és:

anell $\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \oplus) \text{ és grup abelià} \\ \otimes \text{ és associativa} \\ \otimes \text{ és distributiva respecte a } \oplus; \end{cases}$

anell unitari o amb unitat $\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \oplus, \otimes) \text{ és anell} \\ \text{existeix element neutre per l'operació } \otimes; \end{cases}$

anell commutatiu $\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \oplus, \otimes) \text{ és anell} \\ \otimes \text{ és commutativa;} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{cos} &\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \oplus, \otimes) \text{ és anell amb unitat} \\ \text{tot element diferent del neutre de } \oplus \text{ és inversible per l'operació } \otimes; \end{cases} \\ \text{cos commutatiu} &\Leftrightarrow \begin{cases} (A, \oplus, \otimes) \text{ és cos} \\ \otimes \text{ és commutativa.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definició. Sigui (A, \oplus, \otimes) un anell on 0 és l'element neutre de (A, \oplus) . Direm que $a, b \in A$ són *divisors de zero* de A si $a \neq 0, b \neq 0$ i $a \otimes b = 0$.

Definició. Si un anell no té divisors de zero, direm que és *integre* o bé que és un *domini d'integritat*.

Exercicis

1. A \mathbb{Q} es defineix l'operació $a \circ b = a + b + \lambda$, amb $\lambda \in \mathbb{N}$ fix. Calculeu λ perquè la llei sigui associativa. Estudieu altres possibles propietats.

2. En el conjunt $E = \{a, b, c\}$, es defineix una llei interna donada per:

$$a^2 = a; \quad b^2 = b; \quad c^2 = c; \quad bc = cb = a; \quad ca = ac = b; \quad ab = ba = c.$$

Demostreu que aquesta llei commutativa no és associativa.

3. Definim a \mathbb{R} l'operació $a * b = kab + k'(a + b)$ on k, k' són reals fixos. Trobeu k i k' per tal de que l'operació sigui associativa.

4. És (\mathbb{Q}^+, \otimes) grup, on $x \otimes y = \frac{x}{y}$?

5. Estudieu l'estructura de (\mathbb{Z}, \perp) on $a \perp b = a + b + 2ab$.

6. Considereu l'operació

$$x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

a l'interval $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Estudieu les propietats de $*$.

7. Quina estructura té $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$, on

$$x * y = \begin{cases} xy, & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{y}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

8. La llei de composició de dues resistències en paral·lel R_1 i R_2 ve donada per $R = R_1 \star R_2$ on $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Estudieu les propietats de la llei \star . És grup?

9. A la teoria de la relativitat restringida, la llei de composició de dues velocitats v_1 i v_2 de la mateixa direcció és

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

on c és la velocitat de la llum. Estudieu les propietats d'aquesta llei.

10. A \mathbb{R} es defineix l'operació $x \star y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ on n és un nombre natural senar.

- Proveu que (\mathbb{R}, \star) és un grup abelià.
- És (\mathbb{R}^+, \star) un subgrup de (\mathbb{R}, \star) ?

11. Considerem el conjunt $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ i l'operació $x * y = x + y + xy$.

- Demostreu que $*$ és operació interna a S .
- Vegeu que $(S, *)$ té estructura de grup.
- Trobeu x tal que $2 * x * 3 = 7$.

12. En un grup abelià (G, \perp) , resoleu, tot justificant els passos realitzats, l'equació

$$x \perp a \perp b \perp x \perp c = b \perp x \perp a,$$

amb $a, b, c \in G$ elements donats. Feu el mateix suposant que G no és abelià amb l'equació:

$$a \perp x \perp b \perp c \perp x = a \perp b \perp x.$$

13. Proveu que si en un grup es satisfà $x^2 = e$, per a qualsevol element x , on e denota l'element neutre, aleshores el grup és commutatiu.

14. Sigui (G, \cdot) un grup. Demostreu que G és abelià si, i només si, per a tot $a, b \in G$ es compleix $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

15. Trobeu λ per tal que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ sigui anell, on

$$a \oplus b = a + b - 6,$$

$$a \odot b = ab + \lambda(a + b) + 42.$$

16. És anell $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ amb les operacions:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b)?$$

17.

- a) Sigui $A = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Proveu que A és cos amb la suma i el producte ordinaris.
- b) És cos $B = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ amb la suma i el producte ordinaris?

18. Donat un conjunt $A \neq \emptyset$, demostreu que $(\mathcal{P}(A), \oplus, \cap)$ és anell commutatiu unitari amb divisors de zero, on \oplus representa la diferència simètrica de conjunts, $X \oplus Y = X \cup Y \setminus X \cap Y$ (per la demostració de la propietat associativa utilitzeu els diagrames de Venn).

19. Considerem a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les operacions

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Demostreu que és anell. Quins elements són inversibles?

20. Sigui $(A, +, \cdot)$ un anell. Definim l'operació següent en A , $x \otimes y = xy - yx$. Demostreu que $x \otimes (y \otimes z) + y \otimes (z \otimes x) + z \otimes (x \otimes y) = 0$, $\forall x, y, z \in A$.

21. Proveu que el conjunt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de les aplicacions de \mathbb{R} en \mathbb{R} és un anell commutatiu unitari i no íntegre amb la suma i el producte següents:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

4. L'àlgebra de les matrius

Matrius i tipus de matrius

Sigui $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cos (normalment $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ó \mathbb{C}).

Definició. Una matriu A d'ordre $m \times n$ és una aplicació

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(i, j) \quad \rightarrow a_{ij}.$$

Ho escriurem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}].$$

Per a tot $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ és un *vector fila*.

Per a tot $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ és un *vector columna*.

m és el nombre de files i n és el nombre de columnes de la matriu.

Definició. $M(m, n, \mathbb{K})$ és el conjunt de les matrius d'ordre $m \times n$ amb elements en \mathbb{K} . Si $m = n$ les matrius es diuen *quadrades d'ordre n* i es denoten per $M(n, \mathbb{K})$.

Definició. Siguin $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ i $B \in M(p, q, \mathbb{K})$,

$$A = B \iff \begin{cases} i) m = p & \text{i} & n = q \\ ii) a_{ij} = b_{ij}, & \forall i, j. \end{cases}$$

Tipus de matrius

1. Matriu *nulla*:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Matriu *triangular superior (inferior)*: si $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$ tal que $j < i$ ($j > i$).
3. Matriu *diagonal*: si $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$ tal que $j \neq i$.
4. Matriu *identitat* I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Operacions amb matrius

1. Suma de matrius

Definició. Siguin $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrius de $M(m, n, \mathbb{K})$, la matriu suma $A + B$ de $M(m, n, \mathbb{K})$ està definida per

$$A + B = [c_{ij}], \quad \text{on } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Propietats. $\forall A, B, C \in MAT(m, n, \mathbb{K})$, es compleix

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $O + A = A + O = A$;
4. $-A = [-a_{ij}]$ satisfà: $A + (-A) = (-A) + A = O$.

Proposició. El conjunt $(M(m, n, \mathbb{K}), +)$ és un grup abelià.

2. Producte d'un escalar per una matriu

Definició. Siguin $\lambda \in \mathbb{K}$ i $A = [a_{ij}] \in M(m, n, \mathbb{K})$, la matriu $\lambda \cdot A \in M(m, n, \mathbb{K})$ està definida per

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Propietats. $\forall A, B, C \in M(m, n, \mathbb{K})$ i $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

1. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$;
2. $\lambda_1 \cdot (A + B) = \lambda_1 \cdot A + \lambda_1 \cdot B$;
3. $(\lambda_1 \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A)$;
4. $\lambda_1 \cdot O = O$, $0 \cdot A = O$, $1 \cdot A = A$.

3. Producte de matrius

Definició. Siguin $A = [a_{ij}] \in M(m, n, \mathbb{K})$ i $B = [b_{jk}] \in M(n, p, \mathbb{K})$, la matriu $A \cdot B \in M(m, p, \mathbb{K})$ està definida per

$$A \cdot B = [c_{ik}], \quad \text{on} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Propietats. $\forall A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $B \in M(n, p, \mathbb{K})$, $C \in M(p, q, \mathbb{K})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$;
3. $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$;
4. si $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $B, C \in M(n, p, \mathbb{K})$: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$,
si $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$, $C \in M(n, p, \mathbb{K})$: $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$.

Proposició. $(M(n, \mathbb{K}), +, \cdot)$ és un anell unitari.

Matriu inversa i transposada

Definició. Sigui $A \in M(n, \mathbb{K})$ una matriu quadrada, $A^{-1} \in M(n, \mathbb{K})$ és la matriu *inversa* de A si $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. La inversa d'una matriu, si existeix, és única. Si una matriu A té inversa es diu que A és *invertible*.

Proposició. Si $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ són matrius invertibles i $\lambda \neq 0$ aleshores:

- i) $A \cdot B$ és invertible;
- ii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- iii) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- iv) $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.

Definició. Sigui $A = [a_{ij}] \in M(m, n, \mathbb{K})$, $A^t = [a_{ji}] \in M(n, m, \mathbb{K})$ és la matriu *transposada* de la matriu A , resultat de canviar files per columnes.

Propietats.

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$;
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Definició. Sigui $A \in M(n, \mathbb{K})$. A és *simètrica* si $A = A^t$. A és *antisimètrica* si $A = -A^t$.

Matrius per Blocs

Definició. Una matriu per blocs és una matriu on els seus elements són matrius rectangulars o submatrius. Sigui $A \in M(m, n, \mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} \in M(l, k, \mathbb{K}), \quad A_{12} \in M(l, n - k, \mathbb{K}),$$

$$A_{21} \in M(m - l, k, \mathbb{K}), \quad A_{22} \in M(m - l, n - k, \mathbb{K}).$$

Sigui $B \in M(n, p, \mathbb{K})$,

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$B_{11} \in M(k, q, \mathbb{K}), \quad B_{12} \in M(k, p - q, \mathbb{K}),$$

$$B_{21} \in M(n - k, q, \mathbb{K}), \quad B_{22} \in M(n - k, p - q, \mathbb{K})$$

es verifica:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix} \in M(m, p, \mathbb{K}). \end{aligned}$$

PAQ-reduccions

Canvis elementals per files

Sigui $A \in M(m, n, \mathbb{K})$. Els *canvis elementals per files* (c.e.f.) són:

- 1f) intercanviar dues files de A ;
- 2f) substituir una fila de A per aquesta mateixa fila més una altra fila multiplicada per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$;
- 3f) multiplicar una fila de A per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

Un c.e.f. pot interpretar-se com una aplicació:

$$e : M(m, n, \mathbb{K}) \rightarrow M(m, n, \mathbb{K})$$

$$A \rightarrow e(A).$$

Proposició 1. A cada c.e.f. e li correspon un c.e.f. e_1 del mateix tipus que e i tal que $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$.

Definició. Siguin $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$. B és *equivalent* a A per files ($B \equiv_f A$) si es pot obtenir de A a partir d'una successió finita de c.e.f.

Definició. $P \in M(m, \mathbb{K})$ és una *matriu elemental per files* (m.e.f.) si s'obté a partir de I_m per un únic c.e.f.

Proposició 2. Sigui e un c.e.f. i $P \in M(m, \mathbb{K})$ tal que $P = e(I_m)$. Per tota matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ es compleix: $e(A) = e(I_m) \cdot A = P \cdot A$.

Proposició 3. Tota matriu elemental per files, P , és invertible.

Proposició 4. Siguin $A, A' \in M(m, n, \mathbb{K})$. $A' \equiv_f A \Leftrightarrow A' = P \cdot A$ on P és producte de m.e.f.

La proposició 4 permet obtenir matrius equivalents per files esglaonades fent c.e.f.

Canvis elementals per columnnes

Sigui $A \in M(m, n, \mathbb{K})$. Els *canvis elementals per columnnes* (c.e.c.) són:

- 1c) intercanviar dues columnnes de A ;

2c) substituir una columna de A per aquesta mateixa columna més una altra columna multiplicada per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$;

3c) multiplicar una columna de A per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

Un c.e.c. pot interpretar-se com una aplicació:

$$\begin{aligned} e' : M(m, n, \mathbb{K}) &\rightarrow M(m, n, \mathbb{K}) \\ A &\rightarrow e'(A). \end{aligned}$$

Proposició 5. A cada c.e.c. e' li correspon un c.e.c. e'_1 del mateix tipus que e' i tal que $e'_1(e'(A)) = e'(e'_1(A)) = A$.

Definició. Siguin $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$. B és *equivalent* a A per columnes ($B \equiv_c A$) si es pot obtenir de A a partir d'una successió finita de c.e.c.

Definició. $P \in M(n, \mathbb{K})$ és una *matriu elemental per columnes* (m.e.c.) si s'obté a partir de I_n per un únic c.e.c.

Proposició 6. Sigui e' un c.e.c. i $Q \in M(n, \mathbb{K})$ tal que $Q = e'(I_n)$. Per tota matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ es compleix: $e'(A) = A \cdot e'(I_n) = A \cdot Q$.

Proposició 7. Tota matriu elemental per columnes, Q , és invertible.

Proposició 8. Siguin $A, A' \in M(m, n, \mathbb{K})$. $A' \equiv_c A \Leftrightarrow A' = A \cdot Q$ on Q és producte de m.e.c.

La proposició 8 permet obtenir matrius equivalents per columnes esglaonades fent c.e.c.

Matrius esglaonades

La matriu següent és esglaonada per files:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriu següent és esglaonada per columnes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriu transposada d'una matriu esglaonada per files és una matriu esglaonada per columnes.

Teorema. Tota matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ és equivalent per files (columnes) a una matriu esglaonada per files (columnes).

Teorema. Donada una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, existeixen dues matrius invertibles $P \in M(m, \mathbb{K})$ i $Q \in M(n, \mathbb{K})$ i un $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq m, n$ tal que:

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrius P i Q no són úniques, depenen dels canvis elementals.

Matrius invertibles i inversa generalitzada

Definició. Sigui $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, definim el *rang* de A , $\text{rang}(A)$:

$$\text{rang}(A) = r \iff \exists P, Q \text{ invertibles, tal que } P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sigui $A \in M(n, \mathbb{K})$ una matriu quadrada,

$$A \text{ és invertible} \iff \text{rang}(A) = n.$$

Proposició. El rang d'una matriu és independent de la PAQ-reducció.

Càlcul de la inversa d'una matriu quadrada

Sigui $A \in M(n, \mathbb{K})$. Fem c.e.f. sobre la matriu $(I_n | A)$, comprovem si $\text{rang}(A) = n$ i, en cas afirmatiu, trobem la matriu invertible P tal que $P \cdot A = I_n$. Llavors $P = A^{-1}$.

Definició. Sigui $A \in M(n, \mathbb{K})$ amb $\text{rang}(A) < n$ o bé $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ no quadrada. La *inversa generalitzada* de la matriu A , A^i , és una matriu que compleix:

$$A \cdot A^i \cdot A = A.$$

Teorema. $\forall A \in M(m, n, \mathbb{K})$ té una inversa generalitzada que ve donada per la fórmula:

$$A^i = Q \cdot \begin{pmatrix} I_r & U \\ V & W \end{pmatrix} \cdot P$$

on U, V, W són matrius qualssevol i P i Q són matrius d'una PAQ-reducció, és a dir, tals que:

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercicis

1. Considereu les tres matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Trobeu, quan tingui sentit, $A + B$, $-2B$, $A + 2B$, $B - A$, $A + C$, $A \cdot B$, $A \cdot B^t$, $A^t \cdot B$, $A \cdot (B \cdot C)$.

2. Si $A \in M(n, p, \mathbb{R})$, a què és igual $I_n \cdot A$? I si $A \in M(m, n, \mathbb{R})$, a què és igual $A \cdot I_n$?

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculeu $(A \cdot B)^t$ i $B^t \cdot A^t$. Noteu que encara que A i B són simètriques, $A \cdot B$ no ho és. Calculeu $B^t \cdot A \cdot B$ i comproveu que és simètrica.

4. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^2 , A^3 i A^4 .

5. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ on $i^2 = -1$, doneu una expressió general per a A^n .

6. Si $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, demostreu que $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

7. Trobeu totes les matrius $A \in M(2, \mathbb{R})$ tals que $A^2 = I_2$.

8. Un cas important on podem simplificar B de l'equació matricial $A \cdot B = C \cdot B$ és quan aquesta identitat es satisfà per a tota B . Per exemple, proveu que si

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

per a tot b_1, b_2 , llavors $A = C$.

9. Supposeu que la tercera columna d'una matriu A és igual a dues vegades la primera columna. Demostreu que la mateixa propietat és certa per a qualsevol producte $B \cdot A$.

10. Quines matrius reals satisfan $A^t \cdot A = O$? Justifiqueu la resposta.

11. Doneu dues matrius $A, B \in M(2, \mathbb{R})$ que no tinguin cap component nul·la però que compleixin $A \cdot B = O$.

12. Sigui $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ tal que $ad - bc \neq 0$. Trobeu A^{-1} .

13. Si A és una matriu de $M(2, \mathbb{R})$ que commuta amb tota matriu d'aquest mateix conjunt, llavors demostreu que A ha de ser un múltiple de la matriu identitat I_2 .

14. Resoleu l'equació matricial $(A \cdot X^{-1})^{-1} + B = X$, on

$$A = 1/3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Demostreu que si A és una matriu d'involució ($A^2 = I$), aleshores la matriu $B = \frac{1}{2}(I + A)$ és idempotent ($B^2 = B$).

16. Trobeu per a quines matrius quadrades A i B es compleix:

- a) $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$;
- b) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

17. Una matriu A es diu d'involució si $A^2 = I$. Demostreu que A^2 és d'involució si, i només si, $(I - A) \cdot (I + A) = O$.

18. Sigui A una matriu quadrada. Comproveu que $A + A^t$ és una matriu simètrica i que $A - A^t$ és una matriu antisimètrica. Proveu que tota matriu quadrada és suma d'una matriu simètrica i una antisimètrica.

19. Si A i B són dues matrius simètriques, demostreu que $A \cdot B + B \cdot A$ és una matriu simètrica i $A \cdot B - B \cdot A$ és antisimètrica.

20. Supposeu que A és una matriu quadrada que satisfà $A^2 - 3A + I = O$. Demostreu que $A^{-1} = 3I - A$.

21. Sigui A una matriu quadrada.

- Si $A^2 = O$, proveu que $I - A$ és invertible.
- Si $A^3 = O$, proveu que $I - A$ és invertible.
- En general, si $A^n = O$ per a un cert $n \in \mathbb{Z}^+$, demostreu que $I - A$ és invertible.
- Suposeu que $A^2 + 2A + I = O$. Demostreu que A és invertible.
- Suposeu que $A^3 - A + I = O$. Demostreu que A és invertible.

22. Siguin A i B dues matrius quadrades de la mateixa mida. Direm que A és semblant a B si existeix una matriu invertible T tal que $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$. Si aquest és el cas, proveu:

- B és semblant a A ;
- A és invertible si, i només si, B és invertible;
- A^t és semblant a B^t ;
- si $A^n = O$ i C és una matriu invertible de la mateixa mida que A , llavors $(C \cdot A \cdot C^{-1})^n = O$.

23. Si A compleix $A^3 - 3A^2 + 2A + I = O$, demostreu que tota matriu semblant amb A compleix la mateixa igualtat.

24. Demostreu que respecte la multiplicació, el subconjunt de $M(n, \mathbb{R})$ format per les matrius diagonals invertibles té estructura de grup abelià.

25. Siguin $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Demostreu que si existeix una matriu $P \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $P^{-1} = P^t$ i, $P^t \cdot A \cdot P$ i $P^t \cdot B \cdot P$ són dues matrius diagonals, aleshores es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. Demostreu que A i B són matrius simètriques

26. Sense usar *llapis ni paper*, determineu si les matrius següents són invertibles.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0.1 \\ 0 & 5 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0.37 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

27. Trobeu una matriu K tal que $A \cdot K \cdot B = C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Trobeu una PAQ-reducció de les matrius següents:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0.5 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -8 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ -5 & 7 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

29. Siguin A i B dues matrius i C la matriu definida per blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Demostreu que $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.

30. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

trobeu una matriu invertible $P \in M(3, \mathbb{R})$ tal que $P \cdot A$ tingui forma esglaonada reduïda per files.

31. Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad g) \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

32. Si A^i és una inversa generalitzada de A , demostreu que $(A^i)^t$ és una inversa generalitzada de A^t .

33. Calculeu la inversa generalitzada de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Sistemes d'equacions lineals

Sistemes d'equacions

Definició. Sigui $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cos commutatiu. Resoldre el sistema d'equacions lineals s format per m equacions amb n incògnites x_1, x_2, \dots, x_n :

$$(s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

equivale a trobar tots els elements $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ que satisfan les m equacions alhora.

Discutir un sistema consisteix en esbrinar si el sistema té solució (*compatible*) o no té solució (*incompatible*). En el cas que tingui solució cal discutir si la solució és única (*compatible determinat*) o si hi ha més d'una solució (*compatible indeterminat*).

Els escalars $a_{ij} \in \mathbb{K}$ s'anomenen *coeficients*, x_i són les *incògnites* i $b_i \in \mathbb{K}$ són els *termes independents*.

El sistema s és *homogeni* si $b_i = 0, \forall i = 1, \dots, m$. Tot sistema homogeni admet la solució trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Considerem les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matriu A és la *matriu del sistema* i la matriu A' és la *matriu ampliada*. El sistema s admet la representació matricial

$$A \cdot X = b$$

Discussió d'un sistema d'equacions

Considerem $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.

Teorema. El sistema homogeni $A \cdot X = 0$ té solució no trivial si, i només si, $\text{rang}(A) < n$.

Teorema. El sistema $A \cdot X = b$ és compatible si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = r$. En aquest cas el sistema és determinat si, i només si, $r = n$.

Si $A \cdot X = b$ és un sistema compatible amb $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = r$, llavors es poden trobar $n - r$ incògnites a les quals se'ls hi poden assignar valors arbitraris. El sistema es resol considerant aquestes incògnites com a paràmetres. Direm que el sistema té $n - r$ graus de llibertat.

Resolució d'un sistema d'equacions

Definició Dos sistemes d'equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions.

Teorema. Si A' és la matriu ampliada d'un sistema, fent canvis elementals per files en la matriu A' obtenim sistemes equivalents.

Podem resoldre un sistema fent canvis elementals per files a la matriu ampliada. L'equació trivial $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ és irrellevant i per tant poden suprimir una fila de zeros. Una equació del tipus: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = k$, on $k \neq 0$, no té solució i per tant el sistema és incompatible.

Exercicis

1. Quines de les equacions següents són lineals en x, y , i z ?

- a) $x + 2xy + z = 2$; b) $x + y + z = \sin k$;
 c) $x - 3y + 2z^{1/2} = 4$; d) $x = \sqrt{2}z - y + 7$;
 e) $x + y^{-1} - 3z = 5$; f) $x = z$.

2. Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;
 c) $\begin{pmatrix} 0.5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0.3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Digueu:

- a) Quin és el rang d'un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és indeterminat?
 b) Quantes equacions són necessàries (com a mínim) per tenir un sistema indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?
 c) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?
 d) Inventeu un sistema compatible determinat, un altre d'indeterminat i un altre d'incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

4. Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ i $A - B$ no és invertible, demostreu que existeix almenys una matriu $X \in M(n, 1, \mathbb{R})$, $X \neq 0$, tal que $A \cdot X = B \cdot X$.

5. Comproveu que el sistema d'equacions següent és compatible indeterminat només si $c = a + b$,

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x \quad \quad + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

6. Demostreu que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - y - 2z = b \\ -x - y = c \end{cases}$$

no té solució si $a > 0, b > 0$ i $c > 0$.

7. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$

8. Resoleu els sistemes homogenis següents:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 6y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

9. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$$

10. Discutiu a \mathbb{C} ,

$$\begin{cases} ix + y + iz + t = 0 \\ 2x - y + 2z - t = 1 \\ x + iy - z - it = 2 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

11. Discutiïu, segons el valor del paràmetre real a , el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

12. Estudieu, segons els valors dels paràmetres, els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} bx + y + z = b^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3b \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = k \\ ax + by = k^2 \\ a^2x + b^2y = k^3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} ax + y - z + t - u = 0 \\ x + ay + z - t + u = 0 \\ -x + y + az + t - u = 0 \\ x - y + z + at + u = 0 \\ -x + y - z + t + au = 0 \end{cases}$$

13. Tres màquines diferents, A , B i C , són utilitzades 8 hores diàries per produir quatre productes diferents t , u , v i w . El nombre d'hores que cada màquina ha de ser utilitzada per fabricar una unitat de cada producte ens ho mostra la taula següent,

	Producte			
Màquina	t	u	v	w
A	1	2	1	2
B	7	0	2	0
C	1	0	0	4

és a dir, per produir una unitat de v cal 1 hora de la màquina A i 2 hores de la màquina B .

- a) En termes de la quantitat de cada producte produït, quines equacions representen un ple ús de les màquines en 8 hores?
- b) Resoleu el sistema trobat a l'apartat anterior.
- c) Tenint present que resultats negatius no tenen sentit, però sí les solucions no enteres, interpreteu la solució del sistema.
- d) Quina quantitat es fabrica de cada producte si la producció de t és maximitzada, mantenint el ple funcionament de totes les màquines?
- e) Quina producció dels quatre articles maximitza la producció de w , mantenint la plena ocupació de les màquines?

6. Espais vectorials

Espai vectorial

Definició. Sigui $(E, +)$ un grup abelià i $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cos. E és un \mathbb{K} -*espai vectorial* o *espai vectorial sobre* \mathbb{K} si existeix una operació externa:

$$\mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

$$(\alpha, u) \rightarrow \alpha \cdot u \in E$$

que compleix: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$,

1. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
2. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$;
3. $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$;
4. $1 \cdot u = u$.

Els elements de E els anomenem *vectors* i els de \mathbb{K} *escalars*.

Propietats immediates. Si 0_E i $0_{\mathbb{K}}$ són els elements neutres de $(E, +)$ i $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ respectivament,

1. $\alpha \cdot 0_E = 0_E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$;
2. $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E, \forall u \in E$;
3. $\alpha \cdot u = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ó } u = 0_E$;
4. $(-\alpha) \cdot u = -(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (-u), \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Subespai vectorial

Definició. Sigui E un \mathbb{K} -espai vectorial i $F \subset E$. F és subespai vectorial de E si F amb les operacions de E induïdes a F és \mathbb{K} -espai vectorial.

Proposició. $\{0_E\}$ i E són subespais vectorials de E . S'anomenen subespais *impropis*.

Proposició. Sigui E un \mathbb{K} -espai vectorial i $F \subset E$, $F \neq \emptyset$, són equivalents:

- i) F és subespai vectorial de E ,
- ii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in F \Rightarrow \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$.

Proposició. Si F i G són subespais vectorials de E , llavors $F \cap G$ és un subespai vectorial de E .

Observació. En general, la unió de subespais vectorials no és un subespai vectorial.

Combinacions lineals. Qualsevol expressió del tipus $\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n$, on $\alpha_i \in \mathbb{K}$ i $u_i \in E$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, és una *combinació lineal* dels vectors u_1, u_2, \dots, u_n .

Subespai vectorial generat. Donat $A \subset E$, on E és un \mathbb{K} -espai vectorial, el *subespai vectorial generat per A* , $\langle A \rangle$, és el subespai de E més petit de tots els que contenen A .

Proposició. Si $A \neq \emptyset$, el subespai vectorial generat per A està format per totes les combinacions lineals de vectors de A :

$$\langle A \rangle = \{u \mid u = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n, \quad u_1, \dots, u_n \in A, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Dependència lineal

Definició. Un conjunt de vectors $B \subset E$, direm que és *linealment independent* si, i només si, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ i $\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in B$,

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_n \cdot u_n = 0_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Si no és linealment independent, direm que és *linealment dependent*.

Propietats.

1. B linealment independent $\implies 0_E \notin B$;
2. B linealment independent i $B' \subset B \implies B'$ linealment independent;
3. B linealment dependent $\iff \exists u \in B$, tal que u és combinació lineal de vectors de $B \setminus \{u\}$.

Base i dimensió

Definició. Un conjunt B de vectors de E , direm que és una base de E si, i només si,

- i) B genera E : $\langle B \rangle = E$;
- ii) B és un conjunt de vectors linealment independents.

Proposició. Si B és una base finita de E , llavors qualsevol vector $u \in E$ es pot expressar de forma única com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \text{ únics, tals que } u = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n, \text{ on } B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Proposició. Sigui $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunt de n vectors del \mathbb{R} -espai vectorial \mathbb{R}^n , on $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ és una base de } \mathbb{R}^n \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ és invertible.}$$

Teorema de Steinitz. Si $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ és una base de E i $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ és un conjunt de r vectors de E linealment independents, aleshores $r \leq n$ i es poden trobar $n - r$ vectors de B , $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}}$, tals que els vectors $\{u_1, u_2, \dots, u_r, e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-r}}\}$ formen una base de E .

Lema. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ és una base de E i $u = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$ amb $\alpha_1 \neq 0$ aleshores $\{u, e_2, \dots, e_n\}$ és base de E .

Corollari. Si E és un espai vectorial amb una base finita (el nombre de vectors de la base és finit), aleshores qualsevol altra base de E és finita i té el mateix nombre de vectors.

Definició. La *dimensió* d'un espai vectorial E , $\dim(E)$, és el nombre de vectors d'una base qualsevol.

Propietats.

1. Si $E = \{0_E\}$, llavors $\dim(E) = 0$.
2. A un espai vectorial de dimensió n ,
 - i) n vectors linealment independents formen base,
 - ii) n vectors que generin E formen base.
3. Si F és un subespai vectorial de E , llavors $\dim(F) \leq \dim(E)$.

4. Si F és un subespai vectorial de E de dimensió finita, i $\dim(F) = \dim(E)$, llavors $E = F$.

Proposició. Sigui $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ un conjunt de m vectors del \mathbb{R} -espai vectorial \mathbb{R}^n , on $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $\forall i = 1, \dots, m$. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i el subespai vectorial de \mathbb{R}^n : $F_A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$. Sigui A' la matriu esglaonada per files equivalent a A obtinguda fent canvis elementals per files, és a dir, existeix una matriu invertible P tal que $A' = P \cdot A$. Aleshores:

- i) $F_A = F_{A'}$, és a dir, fent canvis elementals per files el subespai no varia.
- ii) Les files no nul·les de A' formen una base de $F_{A'}$ i, per tant, també de F_A .
- iii) El nombre de vectors de la base de F_A és $\text{rang}(A)$.

Suma de subespais vectorials. Suma directa

Definició. Si F i G són subespais de E , el subespai vectorial *suma* està format pels vectors:

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$

Propietats. Si F, G, H són subespais vectorials de E ,

1. $F + G$ és el subespai vectorial generat per $F \cup G$: $F + G = \langle F \cup G \rangle$;
2. $F \cap (G + H) \supset (F \cap G) + (F \cap H)$;
3. $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Fórmula de Grassmann. Si F, G són subespais vectorials qualssevol de E , llavors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Definició. La suma de dos subespais vectorials F i G és *directa* $\iff F \cap G = \{0_E\}$.

Notació. Si la suma de dos subespais vectorials és directa, escriurem $F \oplus G$.

Proposició. La suma $F + G$ és directa si, i només si,

$$\forall u_1, u_2 \in F, \forall v_1, v_2 \in G, u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \implies u_1 = u_2, v_1 = v_2.$$

Definició. Si F_1, F_2, \dots, F_m són subespais vectorials de E , definim el subespai vectorial *suma*:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_m = \{u_1 + u_2 + \dots + u_m \mid u_i \in F_i\}.$$

Definició. La suma $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ és directa si es satisfà:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m = v_1 + v_2 + \dots + v_m \implies u_i = v_i, \forall i = 1, 2, \dots, m, u_i, v_i \in F_i.$$

És a dir, la descomposició d'un vector en suma de vectors dels subespais és única.

Proposició. La suma $F_1 + F_2 + \dots + F_m$ és directa:

$$\iff (F_1 + F_2 + \dots + F_{k-1}) \cap F_k = \{0_E\}, \forall k = 2, \dots, m$$

$$\iff F_i \cap (F_1 + \dots + F_{i-1} + F_{i+1} + \dots + F_m) = \{0_E\}, \forall i = 1, \dots, m$$

Propietats.

1. $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$;
2. $\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dots + \dim(F_m)$.

Observació. Si E és un espai vectorial de dimensió n i $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ és una base de E , llavors

$$E = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle u_n \rangle.$$

Subespai suplementari

Definició. Un subespai vectorial G és subespai *suplementari* del subespai vectorial $F \subset E$ si, i només si, $E = F \oplus G$.

Proposició. Si F, G són subespais vectorials suplementaris en E , llavors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E).$$

Exercicis

1. Digueu quins dels subconjunts següents de \mathbb{R}^3 són subespais vectorials:

- a) $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$;
- b) $\{(x, y, z) \mid xyz = 0\}$;
- c) $\{(x, y, z) \mid 2x + 4y - 3z = 2\}$;
- d) $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$.

2. Sigui $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunt format per les funcions de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Demostreu que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és espai vectorial sobre \mathbb{R} i mireu si són o no subespais vectorials els conjunts següents:

- a) el conjunt de les funcions contínues;
- b) el conjunt de les funcions derivables;
- c) el conjunt de les funcions parelles;
- d) el conjunt de les funcions imparelles;
- e) el conjunt de les funcions constants;
- f) el conjunt de les funcions no negatives;
- g) el conjunt de les funcions tals que $f(x^2) = f(x)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- h) el conjunt de les funcions tals que $f(0) = f(1)$;
- i) el conjunt de les funcions tals que $f(3) = 1 + f(-5)$;
- j) el conjunt de les funcions tals que $f(-1) = 0$.

3. Per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$ el vector b és combinació lineal dels vectors a_i ?

- a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, 2, -\lambda)$;
- b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, 9, \lambda)$;
- c) $a_1 = (3, 4, 2)$, $a_2 = (6, 8, 7)$, $b = (9, 12, -\lambda)$;
- d) $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, \lambda)$, $b = (1, 3, 5)$.

4. Digueu si els vectors següents són linealment dependents o independents:

- a) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$;
- b) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$;
- c) $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$;
- d) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, 2 - 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$, $a_4 = (4, -1, 5, 6)$;

e) $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $a_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

5. Sigui E un espai vectorial sobre \mathbb{R} i u, v, w tres vectors de E que compleixen la relació $2u + 2v - w = -4u - 5v + w$. Demostreu que $\{u, v, w\}$ formen un sistema linealment dependent.

6. A l'espai vectorial \mathbb{R}^4 considerem els vectors $(1, 1, 0, a)$, $(3, -1, b, 1)$, $(-3, 5, a, -4)$. Determineu a i b per tal que aquests vectors siguin linealment dependents.

7. Demostreu que les matrius A i B són linealment independents en $M(2, 3, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. A l'espai $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considereu les funcions f, g, h definides per $f(t) = t^2 + 2t - 1$, $g(t) = t^2 + 1$, $h(t) = t^2 + t$. Demostreu que són linealment dependents.

9. Trobeu un sistema d'equacions que defineixi els subespais vectorials generats pels vectors:

a) $a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$;

b) $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

10. Trobeu una base dels subespais vectorials generats pels vectors a_i :

a) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$;

b) $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$,

$a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

11. Trobeu una base del subespai que generen els vectors $(4, -5, 2)$, $(3, -3, 4)$, $(1, 1, -2)$ i $(2, -1, 1)$. Estudieu si aquest subespai és el mateix que el generat pels vectors $(1, -2, 3)$ i $(2, 0, -1)$.

12. Es considera a \mathbb{R}^5 el subespai format pels vectors $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tals que $x_3 = x_1 + x_2 - x_4$, $x_5 = x_2 - x_1$. Determineu-ne una base i completeu-la fins formar una base de \mathbb{R}^5 .

13. Es considera un espai vectorial E i una base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Demostreu que els vectors $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\}$ també formen una base de E .

14. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ és una base d'un cert espai vectorial E . Demostreu que els vectors $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també formen una base de E .

15. Demostreu que els vectors $e_i \in \mathbb{R}^3$ formen base i trobeu les components de x en aquesta base:

a) $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (1, 2, 3), x = (6, 9, 14);$

b) $e_1 = (2, 1, -3), e_2 = (3, 2, -6), e_3 = (1, -1, 1), x = (6, 2, -7).$

16. Demostreu que els vectors $(1, -1, i), (-1, i, 1), (i, 1, -1)$ formen una base del \mathbb{C} -espai vectorial \mathbb{C}^3 . Trobeu les components de $(1 + i, 1 - i, i)$ en aquesta base.

17. Demostreu que $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 0, 4), v_4 = (0, 0, 0, 2)$ formen una base de \mathbb{R}^4 , i a més:

a) calculeu les components del vector $x = (1, 0, 2, -3)$ en aquesta base;

b) determineu les components d'un vector arbitrari en aquesta base.

18. Trobeu la fórmula que relaciona les components d'un vector de \mathbb{R}^3 respecte a la base formada per $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (0, 0, 1)$, amb les del mateix vector respecte a la base formada per $v_1 = (0, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 0)$.

19. Demostreu que el conjunt de les matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$, formen un \mathbb{R} -espai vectorial. Trobeu-ne una base.

20. Sigui S el subconjunt de \mathbb{R}^n definit per

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\},$$

amb $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ donats. Demostreu que S és un subespai vectorial de \mathbb{R}^n i trobeu una base de S .

21. Proveu que \mathbb{C} és un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió 2 i un \mathbb{C} -espai vectorial de dimensió 1. Generalitzeu el resultat anterior a \mathbb{C}^n .

22. A \mathbb{R}^4 es consideren els vectors $(1, 4, -1, 10)$, $(6, 10, 1, 0)$ i $(2, 2, 1, 1)$. Proveu que són linealment independents i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de \mathbb{R}^4 .

23. A l'espai \mathbb{R}^2 es considera el subespai generat pel vector $(3, -1)$. Trobeu dos subespais que hi siguin suplementaris. Feu el mateix per al subespai de \mathbb{R}^3 generat pels vectors $(1, -1, 2)$, $(-1, 3, -2)$.

24. Considerem el subespai $F = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ de \mathbb{R}^3 , on $e_1 = (1, 1, -1)$, $e_2 = (3, 8, 2)$, $e_3 = (0, -3, -3)$ i $e_4 = (-2, -2, 2)$.

- Trobeu una base i la dimensió de F .
- Demostreu que $(3, -17, -23) \in F$ i busqueu les coordenades d'aquest vector en la base donada a l'apartat anterior.
- Busqueu un subespai suplementari G de F .
- Expresseu el vector $u = (2, 17, 12)$ com a suma de v i w , on $v \in F$ i $w \in G$.

25. Si S i T són dos subespais vectorials de \mathbb{R}^3 de dimensió 2, demostreu que $S \cap T \neq \{(0, 0, 0)\}$.

26. Trobeu la suma i la intersecció dels subespais vectorials generats pels vectors a_i amb els generats pels b_i on:

- $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1)$, $a_3 = (1, 3, 3)$;
 $b_1 = (2, 3, -1)$, $b_2 = (1, 2, 2)$, $b_3 = (1, 1, -3)$.
- $a_1 = (0, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, -1)$, $a_3 = (4, 6, -4)$;
 $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 2, 3)$, $b_3 = (0, -1, -2)$.

27. Sigui $F = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ el subespai de \mathbb{R}^4 solució de l'equació $x - y = 0$ i G el subespai generat per $(1, 1, 2, 1)$ i $(2, 0, -1, 1)$. Trobeu les bases i les dimensions de $F, G, F + G, F \cap G$.

28. Comproveu si són subespais de \mathbb{R}^3 els conjunts següents:

- a) $A = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$;
- b) $B = \{(x, y, z) \mid |x| = |y|\}$;
- c) $C = \{(x, y, z) \mid z = x + 2\}$;
- d) $D = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$;
- e) $E = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$;
- f) $F = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$;
- g) $G = \{(x, y, z) \mid z = x + y\}$.

Trobeu una base i la dimensió dels que siguin subespais. Calculeu una base i la dimensió de $D \cap F$, $D \cap G$, $F \cap G$, $A \cap D$, $D + F$, $D + G$, $F + G$ i $A + D$. Quines d'aquestes sumes són directes?

29. A \mathbb{R}^3 es considera el subespai $A = \langle (0, 1, 1), (4, 1, -1), (2, 1, 0) \rangle$.

- a) trobeu una base de A ;
- b) trobeu la condició que ha de satisfer un vector (x, y, z) perquè sigui de A ;
- c) trobeu una base de $B = \{(a + 3b - c, b - c, a + 2b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
- d) trobeu una base de $A \cap B$;
- e) trobeu una base de $A + B$.

30. A \mathbb{R}^4 es consideren els subespais vectorials $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ i $S_a = \{(\lambda a + \mu(2a + a^2), 0, 0, \lambda + \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ on $a \in \mathbb{R}$. Calculeu per a quins valors de a la dimensió de S_a és mínima. Doneu bases i dimensions de S , S_a , $S \cap S_a$ i $S + S_a$ segons els diferents valors de a . Per a quins valors de a és $\mathbb{R}^4 = S \oplus S_a$?

31. Siguin U_1 i U_2 els subespais vectorials de $M(2, \mathbb{R})$ definits per:

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ e & -c \end{pmatrix} : c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Calculeu la dimensió i una base de $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ i $U_1 + U_2$.

32. Trobeu una base del subespai E de \mathbb{R}^5 generat pels vectors $e_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$, $e_2 = (1, 2, -1, -1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 4, 0)$, $e_4 = (2, 4, 1, 10, 1)$ i $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Caracteritzeu els vectors de \mathbb{R}^5 que pertanyen a aquest subespai. Si $F = \{(0, u, 0, v, 0) \in \mathbb{R}^5 : u, v \in \mathbb{R}\}$,

quina és la dimensió de $E + F$ i $E \cap F$? Doneu condicions sobre les coordenades de $b = (0, 0, 0, b_4, b_5)^t$ per tal que el sistema lineal $Ax = b$, on les files de A són els vectors e_i , $i = 1, \dots, 5$, sigui compatible. En els casos en que ho sigui trobeu les seves solucions.

33. $A \in M(n, \mathbb{R})$ és una matriu **màgica** si la suma dels elements de cada fila, columna o diagonal principal és sempre la mateixa.

- demostreu que el conjunt de les matrius màgiques és un subespai de $M(n, \mathbb{R})$;
- feu el mateix per a les matrius màgiques simètriques i per a les matrius màgiques antisimètriques;
- en el cas $n = 3$, trobeu la dimensió i doneu una base de cadascun dels tres subespais anteriors.

34. Denotem per $S(n)$ i $H(n)$ els subspais de $M(n, \mathbb{R})$ formats per les matrius simètriques i antisimètriques respectivament.

- A $M(n, \mathbb{R})$ definim la relació,

$$A \sim B \iff \frac{A + B^t}{2} \in S(n).$$

Demostreu que \sim és una relació d'equivalència;

- si $A, B \in S(n)$, demostreu: $A \cdot B \in S(n) \iff A \cdot B = B \cdot A$;
- demostreu que $S(3)$ és un \mathbb{R} -espai vectorial de dimensió 6. Trobeu una base d'aquest espai;
- si $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$, definim la traça de la matriu A com el nombre real $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Demostreu que si $A \in H(n)$, aleshores $\text{tr } A = 0$;
- definim l'aplicació $f : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \text{tr } A$. És f injectiva? I exhaustiva?

35. Suposem que E és un espai vectorial i S un subespai vectorial de E . A l'espai vectorial E definim les dues relacions següents:

$$u \sim_1 v \iff u - v \in S \text{ i}$$

$$u \sim_2 v \iff u, v \text{ és un sistema linealment dependent.}$$

Demostreu que \sim_1 compleix la propietat transitiva i \sim_2 no.

36. A l'espai vectorial M sobre \mathbb{R} de les matrius quadrades d'ordre n amb coeficients reals, considerem els subconjunts S i T formats, respectivament, per totes les matrius simètriques i per totes les matrius antisimètriques.

- a) Demostreu que S i T són subespais vectorials de M .
- b) Calculeu la dimensió de S i de T .
- c) Demostreu que $M = S \oplus T$.

7. Aplicacions lineals

Aplicació lineal

Definició. Una aplicació $f : E \rightarrow F$ entre dos \mathbb{K} -espais vectorials E i F és una *aplicació lineal* si

- i) $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in E;$
- ii) $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u), \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

Proposició. $f : E \rightarrow F$ és una aplicació lineal si, i només si,

$$f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v), \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Propietats. Si $f : E \rightarrow F$ és aplicació lineal,

1. $f(0_E) = 0_F;$
2. $f(-u) = -f(u);$
3. H és subespai vectorial de $E \implies f(H)$ és subespai vectorial de $F;$
4. H és subespai vectorial de $F \implies f^{-1}(H)$ és subespai vectorial de $E.$

Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Donada una aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ definim:

nucli de f com l'antiimatge del vector 0_F :

$$\text{Ker } f = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} = f^{-1}(0_F);$$

imatge de f com el conjunt de totes les imatges dels vectors de E :

$$\text{Im } f = \{f(u) \mid u \in E\} = f(E).$$

Propietats.

1. $\text{Ker } f$ és subespai vectorial de $E;$
2. $\text{Im } f$ és subespai vectorial de $F.$

Notació. L'aplicació lineal $f : E \rightarrow F$, direm que és un

monomorfisme si f és injectiva

epimorfisme si f és exhaustiva

isomorfisme si f és bijectiva

endomorfisme si $E = F$

automorfisme si f és un endomorfisme bijectiu.

Definició. El *rang* d'una aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ és la dimensió del subespai $\text{Im } f$:

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Proposició. L'aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ és

injectiva $\iff \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \dim(\text{Ker } f) = 0$,

exhaustiva $\iff \text{rang}(f) = \dim(F)$.

Teorema de la dimensió. Si $f : E \rightarrow F$ és aplicació lineal, llavors

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E).$$

Proposició. Si E i F són dos \mathbb{K} -espais vectorial de dimensió finita, $\dim(E) = \dim(F)$ i $f : E \rightarrow F$ és aplicació lineal, són equivalents:

i) f és injectiva

ii) f és exhaustiva

iii) f és bijectiva

iv) f transforma bases en bases, és a dir, si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ és una base de E , llavors $\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ és una base de F .

Proposició. Si E és un \mathbb{K} -espai vectorial i $\dim(E) = n \geq 1$, llavors $E \cong \mathbb{K}^n$.

Corol·lari. Si E i F són dos \mathbb{K} -espais vectorials, $\dim(E) = \dim(F) = n$, llavors $E \cong F$.

Proposició. Siguin E i F dos \mathbb{K} -espais vectorials, $\dim(E) = n$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E i v_1, v_2, \dots, v_n vectors de F (no necessàriament diferents) llavors existeix una única aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ tal que $f(e_i) = v_i, \forall i = 1, \dots, n$.

Corol·lari. Una aplicació lineal queda completament determinada per les imatges dels vectors d'una base.

Corol·lari. Dues aplicacions lineals $f, g : E \rightarrow F$ són iguals si, i només si, coincideixen sobre els vectors d'una base de E .

Operacions amb aplicacions lineals

Suma. Siguin $f, g : E \rightarrow F$ aplicacions lineals, llavors $f + g : E \rightarrow F$ és l'aplicació tal que

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \quad \forall u \in E.$$

Producte per un escalar. Sigui $f : E \rightarrow F$ una aplicació lineal i $\alpha \in \mathbb{K}$, llavors $\alpha \cdot f : E \rightarrow F$ és l'aplicació lineal tal que

$$(\alpha \cdot f)(u) = \alpha \cdot f(u), \quad \forall u \in E.$$

Composició. Siguin $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ aplicacions lineals, llavors $g \circ f : E \rightarrow G$ és l'aplicació tal que

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)), \quad \forall u \in E.$$

Propietats.

1. La suma de dues aplicacions lineals de E en F és una aplicació lineal.
2. El producte d'una aplicació lineal per un escalar és una aplicació lineal.
3. La composició d'aplicacions lineals és una aplicació lineal.

Definició. Donats dos \mathbb{K} -espais vectorials $(E, +, \cdot)$ i $(F, +, \cdot)$ definim

$$\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ és aplicació lineal}\}$$

A $\mathcal{L}(E, F)$ considerem les operacions següents: $\forall f, g \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$(f, g) \rightarrow f + g$$

$$\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$$

$$(\lambda, g) \rightarrow \lambda \cdot f$$

Proposició. $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ és un \mathbb{K} -espai vectorial.

Definició. En el cas que $E = F$, $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{E}(E)$ és el conjunt d'endomorfismes de E . Si $f, g \in \mathcal{E}(E)$, $g \circ f \in \mathcal{E}(E)$.

Representació matricial d'una aplicació lineal

Matriu associada a una aplicació lineal. Si $f : E \rightarrow F$ és una aplicació lineal, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ una base de F , la *matriu associada* a l'aplicació lineal f respecte a les bases \mathcal{B} i \mathcal{B}' és la matriu

$$M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \begin{cases} f(e_1) = a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} \cdot v_m \\ f(e_2) = a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} \cdot v_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(e_n) = a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} \cdot v_m. \end{cases}$$

Càlcul de $f(v)$ utilitzant la matriu associada. Si $f : E \rightarrow F$ és una aplicació lineal i $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matriu associada a f respecte de les bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E , i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de F , i $x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n \in E$, llavors $f(x) = y = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_m \cdot v_m$, on:

$$f(x) = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Notació. Si les bases estan fixades i per simplificar la notació, $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ho escriurem simplement M_f .

Proposició.

1. Siguin $f, g : E \rightarrow F$ aplicacions lineals, $\lambda \in \mathbb{K}$, M_f i M_g les matrius associades a f i g respecte a les bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de F , llavors $M_f + M_g$ és la matriu associada a $f + g$ i $\lambda \cdot M_f$ és la matriu associada a $\lambda \cdot f$ respecte a les bases \mathcal{B} i \mathcal{B}' , és a dir,

i) $M_{f+g} = M_f + M_g$,

ii) $M_{\lambda \cdot f} = \lambda \cdot M_f$.

2. Siguin $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ aplicacions lineals, M_f la matriu associada a f respecte a les bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de F , M_g la matriu

llavors $P \cdot X = Y$ ó bé $P^{-1} \cdot Y = X$:

$$P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Canvis de base i aplicacions lineals

Si $f : E \rightarrow F$ és una aplicació lineal, A és la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E i $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ de F , B és la matriu associada a f en les bases $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ de E i $\mathcal{B}'_1 = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ de F , i P és la matriu de canvi de base en E :

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2 + \dots + a_{n1} \cdot e_n \\ e'_2 = a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + \dots + a_{n2} \cdot e_n \\ \dots \\ e'_n = a_{1n} \cdot e_1 + a_{2n} \cdot e_2 + \dots + a_{nn} \cdot e_n \end{cases} \implies P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i Q és la matriu de canvi de base en F :

$$\begin{cases} v'_1 = b_{11} \cdot v_1 + b_{21} \cdot v_2 + \dots + b_{m1} \cdot v_m \\ v'_2 = b_{12} \cdot v_1 + b_{22} \cdot v_2 + \dots + b_{m2} \cdot v_m \\ \dots \\ v'_m = b_{1m} \cdot v_1 + b_{2m} \cdot v_2 + \dots + b_{mm} \cdot v_m \end{cases} \implies Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

llavors:

$$\begin{array}{ccc} E_{\text{base } \mathcal{B}} & \xrightarrow[A]{} & F_{\text{base } \mathcal{B}_1} \\ Id \uparrow P & & Q^{-1} \downarrow Id \\ E_{\text{base } \mathcal{B}'} & \xrightarrow[f]{B} & F_{\text{base } \mathcal{B}'_1} \end{array}$$

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Exercicis

1. Digueu quines de les aplicacions següents de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m són lineals:

a) $f(x, y, z) = (y + z, 2x + z, 3x - y + z)$;

b) $f(x, y, z) = (x, y + 1, z + 2)$;

c) $f(x, y, z) = (2x + y, x + z, z^2)$;

d) $f(x, y, z) = (2x + y, x + z)$;

e) $f(x, y, z) = (x - y + z, z, y)$;

f) $f(x, y) = (1 + x, y, x - y)$;

g) $f(x, y) = (\sin x, y)$.

2. Es pot trobar una aplicació lineal f de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 que compleixi $f(1, -1, 1) = (1, 0)$ i $f(1, 1, 1) = (0, 1)$?

I una g de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 que compleixi $g(1, -1) = (1, 0)$, $g(2, -1) = (0, 1)$ i $g(-3, 2) = (1, 1)$?

3. Es considera l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x - y + \alpha, z - y + \beta)$. Calculeu α i β perquè sigui lineal i trobeu en aquest cas $\text{Ker} f$ i $\text{Im} f$.

4. Sigui $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow M(3, \mathbb{R})$ tal que:

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ -x & x & y \\ 0 & y & x - y \end{pmatrix}.$$

Proveu que h és lineal i trobeu el seu nucli i la seva imatge.

5. Trobeu una base de la imatge i una del nucli de les aplicacions lineals de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m definides en bases canòniques per les matrius:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Calculeu el nucli i el rang de les aplicacions lineals següents, i comproveu que es satisfà la fórmula $\dim(E) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rang}(f)$:

$$\begin{aligned} f_1 : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (1, 0, 0) &\longrightarrow (1, 0) \\ (0, 1, 0) &\longrightarrow (1, 0) \\ (0, 0, 1) &\longrightarrow (1, 1) \\ f_2 : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (1, 0, 0, 0) &\longrightarrow (1, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 0) &\longrightarrow (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1, 0) &\longrightarrow (1, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 1) &\longrightarrow (2, -1, 0) \end{aligned}$$

7. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial que té una base formada pels vectors $\{u, v, w, t\}$, on $f(u) = u + 2w$, $f(v) = v + w$, $f(w) = 2u + v + w$, $f(t) = 2u + 2v + 4w$. Escriviu la matriu de f en aquesta base i trobeu una base i la dimensió dels subespais $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

8. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determineu l'antiimatge per f de $(0, -2, -4, 4)$;
- trobeu el rang de f ;
- determineu el nucli de f .

9. Sigui A el conjunt de totes les matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Demostreu que A és subespai de $M(2, \mathbb{R})$;
- demostreu que les matrius

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formen una base de A ;

- si definim $f : A \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ per

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

demostreu que f és una aplicació lineal;

- quina és la matriu associada a f prenent $\{M_1, M_2, M_3\}$ com a base de A ?

10. Sigui $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ l'aplicació lineal:

$$f(x, y, z, t, u) = \begin{pmatrix} x + y & x - z + t \\ y + u & 2x + t - z - u \end{pmatrix}$$

a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques:

$$\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\} \text{ de } \mathbb{R}^5,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } M(2, \mathbb{R})$$

b) Calculeu una base i la dimensió dels subespais $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

c) Trobeu les antiimatges $f^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), f^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

d) Determineu si f és injectiva, exhaustiva i bijectiva.

e) Calculeu la matriu associada a f en les bases:

$$\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 0)\} \text{ de } \mathbb{R}^5,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } M(2, \mathbb{R}).$$

11. Sigui

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid c = a + b \right\}$$

un \mathbb{R} -espai vectorial. Considereu l'endomorfisme $f : E \rightarrow E$ donat per

$$f \left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3c + 3a \\ -2a - b & a - b + 3c \end{pmatrix}.$$

Trobeu una base de E , la matriu associada a f en aquesta base i bases de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

12. Considereu les aplicacions $S, H : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ definides respectivament per:

$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{i} \quad H(A) = \frac{1}{2}(A - A^t), \quad \text{per a cada } A \in M(n, \mathbb{R}).$$

a) Demostreu que S i H són lineals.

b) Determineu els nuclis i imatges, i calculeu els rangs.

c) Comproveu que $S^2 = S$, $H^2 = H$ i $S + H = id$.

d) Doneu les matrius associades en la base canònica per a $n = 2$.

13. Un endomorfisme d'un \mathbb{R} -espai vectorial E té per matriu associada en una certa base la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Trobeu $\text{Ker } f$ segons els valors de a .

14. Donat l'endomorfisme de \mathbb{R}^3 , $f_r(x, y, z) = (2x + y + 2z, x + y, x + 2y + rz)$,

- trobeu el valor de r per al qual f_r té el rang més petit possible;
- calculeu una base i la dimensió de $\text{Ker } f_r$ i $\text{Im } f_r$ per a aquest valor;
- si $w = (1, 2, 1)$, calculeu $f_r(w)$ i $f_r^{-1}(f_r(w))$.

15. Siguin E, F, G tres espais vectorials i $f : E \rightarrow F$ i $g : F \rightarrow G$ dues aplicacions lineals que tenen per matrius en certes bases

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivament. Calculeu $\text{Ker } f$, $\text{Ker } g$, $\text{Ker } (g \circ f)$, $\text{Im } f$, $\text{Im } g$, $\text{Im } (g \circ f)$.

16. Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E i f un endomorfisme de E tal que $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1$, $\text{Ker } f = \langle e_1 + e_3 \rangle$.

- Calculeu $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.
- És $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?
- Calculeu f^2 .

17. Sigui f un endomorfisme de \mathbb{R}^4 que en la base canònica té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Vegeu si f és isomorfisme.
- Calculeu la matriu associada a f^{-1} en base canònica.
- Calculeu l'antiimatge per f del vector $(1, 2, -1, 0)$.

18. Demostreu que les següents aplicacions lineals $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ són isomorfismes.

- a) $L(x, y, z) = (x - y, x + z, x + y + 3z)$.
 b) $L(x, y, z) = (2x - y + z, x + y, 3x + y + z)$.

19. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ té per matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calculeu per a quins valors de α l'aplicació f és injectiva i per a quins exhaustiva. Trobeu per a quins valors de α el vector $(1, 2, 2, 1)$ és de $\text{Im } f$.

20. Siguin E, F, G i H quatre espais vectorials de dimensió finita i $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ i $h : G \rightarrow H$ tres aplicacions lineals tals que f és injectiva, h és exhaustiva, $\text{Ker } g = \text{Im } f$ i $\text{Ker } h = \text{Im } g$. Demostreu que si $\dim(F) = \dim(G)$, llavors $\dim(E) = \dim(H)$.

21. A un espai \mathbb{R} -espai vectorial E fixem una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ i al \mathbb{R} -espai vectorial F la base $\{v_1, v_2\}$. Utilitzant aquestes bases, tenim una aplicació lineal definida per

$$f(x, y, z) = (x - 2z, y + z).$$

- a) Trobeu la matriu A associada a f en les bases donades.
 b) Trobeu la matriu B associada a f en les bases $\{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ de E i $\{2v_1, 2v_2\}$ de F .
 c) Mitjançant B , trobeu la imatge del vector $-2e_1 + 2e_2 - 2e_3$.
 d) Trobeu la matriu C associada a f en les bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ de E i $\{2v_1, 2v_2\}$ de F .
 e) Trobeu la matriu D associada a f en les bases $\{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ de E i $\{v_1, v_2\}$ de F .

22. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ una aplicació lineal tal que $f(2, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $\text{Ker } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = t, z = 2t\}$. Trobeu la matriu associada a f en les bases canòniques de \mathbb{R}^4 i $M(2, \mathbb{R})$.

23. Es consideren les bases $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de \mathbb{R}^4 i $\{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(u_1) = v_1 + v_2, f(u_2) = v_1 - 2v_2, \text{Ker } f = \langle u_1 - 2u_2 + u_3, u_2 - 2u_3 + u_4 \rangle$$

i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, que en les bases donades té per matriu associada

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Estudieu si $f \circ g$ és injectiva o exhaustiva. Trobeu una base i la dimensió del nucli i de la imatge de $f \circ g$.
- Feu el mateix per a $g \circ f$.
- És \mathbb{R}^4 suma directa de $\text{Ker}(g \circ f)$ i $\text{Im}(g \circ f)$? I de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$?
- Trobeu la matriu associada a f en les bases $u'_1 = u_1 + u_2$, $u'_2 = u_1 - u_3$, $u'_3 = u_2 - u_4$, $u'_4 = u_4$ de \mathbb{R}^4 i $v'_1 = 3v_1 - 2v_2$, $v'_2 = -5v_1 + 6v_2$ de \mathbb{R}^2 .

24. Considerem l'endomorfisme donat per

$$f : M(2, \mathbb{R}) \longrightarrow M(2, \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-d & 2(-a+b-c+d) \\ 0 & -b+c \end{pmatrix}.$$

- Doneu la matriu associada a f en la base canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Trobeu una base i la dimensió del nucli i de la imatge.
- És $M(2, \mathbb{R})$ suma directa del nucli i de la imatge?
- Trobeu la matriu associada a f en la base

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Sabem que una aplicació lineal f de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 satisfà $f(1, 2, 3) = (1, 0)$, $f(2, 5, 3) = (1, 0)$ i $f(1, 0, 10) = (0, 1)$.

- Trobeu la fórmula que defineix f .
- Calculeu la imatge de $(1, 1, 1)$.
- Trobeu el nucli i la imatge de f .

26. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ amb $a \in \mathbb{R}$.

- Trobeu una matriu P tal que $P \cdot A$ sigui una matriu esglaonada per files. Quina és la dimensió de l'espai generat per les files de la matriu A ?
- Segons el valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, discutiu la solució del sistema d'equacions lineals $A \cdot x = y$, amb $y = (1, 1, 0, 3, 1)^t$. Trobeu la solució quan $a = 1$.
- Si $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ és l'aplicació lineal que té A com a matriu associada en la base canònica de \mathbb{R}^5 , calculeu la dimensió i una base de $\text{Im } f$. És f injectiva?

27. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal, que en la base $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ (a la sortida i a l'arribada), té per matriu associada

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -3 \\ -8 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Trobeu la matriu de f en base canònica (a la sortida i a l'arribada).
- Trobeu el rang de f , una base de $\text{Im } f$, la dimensió i una base de $\text{Ker } f$.
- És f injectiva? I exhaustiva?
- Proveu que $E = \text{Ker } f^2 \oplus \text{Im } f^2$.
- Trobeu l'antiimatge del vector $w = (a, b, -b) = au_1 + bu_2 - bu_3$ segons els valors reals de a i b . Doneu el resultat en base canònica.
- Doneu una base del subespai $f(\text{Im } f^2)$.
- Calculeu $f^{-1}(H)$, on $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$.

28. Siguin u i v dos vectors no nuls del pla tals que no hi ha cap constant $c \neq 0$ amb $v = cu$. Sigui L una aplicació lineal del pla sobre ell mateix tal que $L(1, 0) = u$ i $L(0, 1) = v$. Descriviu la imatge del rectangle de vèrtexs $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(0, 0)$ i $(3, 1)$ per l'aplicació L .

29. Sigui $f : E \rightarrow E$ un endomorfisme que compleix $\text{rang}(f) = 1$. Demostreu que existeix un escalar t tal que $f^2 = tf$.

30. Proveu que donada qualsevol aplicació lineal $f : E \rightarrow F$ existeixen bases de E i F tals que la matriu de f en aquestes bases és $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quin significat té r ?

31. Un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ es diu un *projector* si $f^2 = f$. Demostreu que:

- a) f és un projector si, i només si, $I - f$ ho és.
- b) Si f és un projector, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
- c) Si f i g són projectors determineu condicions necessàries i suficients per a què $f + g$ també ho sigui.
- d) Si f és un projector, trobeu les relacions existents entre $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $\text{Ker}(I - f)$, $\text{Im}(I - f)$.

8. Determinants

Existència i unicitat

Sigui \mathbb{K} el cos \mathbb{R} o \mathbb{C} i $A \in M(n, \mathbb{K})$, $A = [a_{ij}]$, denotarem per α_i les seves columnes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \text{on } \alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Definició. Una aplicació

$$D : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \rightarrow D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}$$

direm que és de tipus *determinant* si satisfà:

- 1) $D(\dots, \beta_i + \gamma_i, \dots) = D(\dots, \beta_i, \dots) + D(\dots, \gamma_i, \dots)$
- 2) $D(\dots, \lambda \cdot \alpha_i, \dots) = \lambda D(\dots, \alpha_i, \dots)$
- 3) $D(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) = -D(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots)$
- 4) $D(I_n) = 1$
- 5) $D(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_i, \dots) = 0$

Proposició. 1), 2), 3) i 4) \iff 1), 2), 4) i 5).

Observació. Direm que l'aplicació és *multilineal* (lineal respecte a cada columna), i *alternada* (al permutar dues columnes, canvia de signe).

Notació. A_{ij} és la matriu resultat de eliminar la fila i i la columna j de la matriu A .

Proposició. L'aplicació següent

$$D \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

és de tipus determinant i és l'única aplicació de tipus determinant de $M(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{R} .

Teorema. $\forall n \geq 1$, sigui $D : M(n-1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicació de tipus determinant.

$\forall i = 1, \dots, n$ definim:

$$f_i : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \rightarrow f_i(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}),$$

llavors f_i és de tipus determinant $\forall i = 1, \dots, n$.

Corollari. $\forall n \geq 1$, existeix una aplicació de tipus determinant de $M(n, \mathbb{R})$ en \mathbb{R} .

Teorema. Existeix una única aplicació de tipus determinant $D : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ i es pot expressar de la forma:

$$D(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}).$$

És a dir, totes les f_i anteriors són iguals, $f_1 = f_2 = \dots = f_n$. Farem servir la notació següent:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) = \dots = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

que es coneix amb el nom de *desenvolupament per una columna*.

Propietats dels determinants

1) Si una columna té dos sumands es pot descomposar com a suma de determinants:

$$\det(\dots, \beta_i + \gamma_i, \dots) = \det(\dots, \beta_i, \dots) + \det(\dots, \gamma_i, \dots)$$

2) Si una columna apareix multiplicada per λ es pot treure λ fora del determinant:

$$\det(\dots, \lambda \cdot \alpha_i, \dots) = \lambda \det(\dots, \alpha_i, \dots)$$

3) Al intercanviar dues columnes el determinant canvia de signe:

$$\det(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots) = -\det(\dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots)$$

4) Si A té dues columnes iguals el determinant és zero:

$$\det(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_i, \dots) = 0$$

5) El determinant de la matriu identitat és 1:

$$\det(I_n) = 1$$

6) El determinant no canvia si a una columna li sumem una altre columna multiplicada per un escalar:

$$\det(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j + \lambda\alpha_i, \dots) = \det(\dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots)$$

7) Si a la matriu hi ha una columna de zeros, el determinant és zero:

$$\det(\dots, 0, \dots) = 0$$

8) Si dues columnes són proporcionals, el determinant és zero:

$$\det(\dots, \alpha_i, \dots, \lambda\alpha_i, \dots) = 0.$$

Proposició. Si $A \in M(n, \mathbb{K})$ i Q, Q_1, \dots, Q_k són matrius elementals per columnes,

a) $\det(A \cdot Q) = \det(A) \det(Q)$

b) $\det(A \cdot Q_1 \cdots Q_k) = \det(A) \det(Q_1) \dots \det(Q_k).$

Proposició. Si $A \in M(n, \mathbb{K})$, A és invertible si, i només si, $\det(A) \neq 0$.

Lema. Si $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ i $B \in M(n, p, \mathbb{K})$, $\text{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.

Proposició. Si $A, B \in M(n, \mathbb{K})$,

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$;

b) $\det(A^t) = \det(A)$.

Observació. Donat que $\det(A^t) = \det(A)$, les propietats per columnes són vàlides per files.

Proposició. El determinant d'una matriu triangular (en particular, el determinant d'una matriu diagonal) és el producte dels elements de la diagonal.

Càlcul de determinants. El desenvolupament per columnes (files) transforma el càlcul de determinants d'ordre n en el càlcul de n determinants d'ordre $n - 1$. Per tant és convenient escollir una fila o una columna que tingui molts zeros. Si no existeix es pot aconseguir mitjançant canvis elementals que no alterin el valor del determinant.

Matriu inversa

Definició. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$, l'*adjunt* de A , $adj(A)$, és la matriu donada per

$$adj(A)(i, j) = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

El $\det(A_{ji})$ s'anomena *menor complementari* de l'element a_{ji} .

Teorema. Si A és invertible, llavors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A).$$

Teorema. Si A és invertible llavors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Teorema. El determinant de la matriu associada a un endomorfisme $f : E \rightarrow E$ és invariant per canvis de base.

Teorema. El determinant de la matriu associada a un isomorfisme $f : E \rightarrow F$ és diferent de zero.

Rang d'una matriu

Proposició. El rang d'una matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ és la dimensió del subespai generat pels vectors columna de A .

Propietat. La dimensió del subespai vectorial generat pels vectors columna, és la mateixa que la dimensió del subespai vectorial generat pels vectors fila.

Definició. Un *menor d'ordre r* de la matriu $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, amb $r \leq m, n$, és el determinant d'una matriu formada pels elements de r files i r columnes de A .

Càlcul del rang. $\text{rang}(A) = r \iff$ existeix un menor d'ordre r no nul, i tots els menors d'ordre més gran que r són nuls.

Proposició. Donats n vectors de \mathbb{R}^n , v_1, v_2, \dots, v_n , són linealment independents si, i només si, $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$

Sistemes d'equacions lineals

Resoldre un sistema d'equacions lineals s format per m equacions amb n incògnites:

$$(s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

equival a trobar tots els escalars $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ que satisfacin les m equacions.

Considerem l'aplicació lineal $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ definida per

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \in \mathbb{K}^m$$

i les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

La matriu A és la matriu associada a f en les bases canòniques de \mathbb{K}^n i \mathbb{K}^m . Les solucions del sistema són els vectors $x = (x_1, \dots, x_n)$ tals que $f(x) = (b_1, \dots, b_m) = b$.

Proposició.

1. El sistema $f(x) = b$ té solució si, i només si, $b \in \text{Im } f$.
2. Si x_0 és una solució de $f(x) = b$, llavors el conjunt de totes les solucions és $x_0 + \text{Ker } f$.

Teorema. El sistema $f(x) = b$ té solució si, i només si, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = r$. Si té solució, és única si, i només si, $r = n$.

Regla de Cramer. Sigui $A \in M(n, \mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si el sistema $A \cdot X = B$ té solució única es compleix;

$$x_i = \frac{\det(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, B, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)}{\det(A)}.$$

Exercicis

1. Suposant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix},$$

$$c) \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}.$$

2. Trobeu els valors de λ tals que $\det A = 0$ on

$$a) A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{pmatrix}.$$

3. Calculeu els determinants següents:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 4 \\ 0.01 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0.2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Calculeu el determinant de la matriu $A = (a_{ij})$, on $a_{ij} = |i - j|$.

5. Proveu que $(x - 1)^3$ divideix el polinomi $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

6. Demostreu la fórmula següent:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x - a)^{n-1} [x + (n - 1)a].$$

7. Demostreu la fórmula següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n + 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n + 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n + 1 & n + 2 & \cdots & 2n - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Utilitzant el problema 6 comproveu que $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a - 1)^{n-1}(a + n - 1).$

9. Calculeu els determinants següents:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 - x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 - x & \cdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n + 1) - x \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n - 1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n - 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}.$$

10. Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, trobeu les arrels de l'equació,

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0.$$

11. Si $A_n \in M(n, \mathbb{R})$ és la matriu tridiagonal de Fibonacci d'ordre n ,

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

demostreu que $a_n = \det A_n$ és la successió de Fibonacci donada per $a_1 = 1, a_2 = 2$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

12. Resoleu el sistema d'equacions lineal següent

$$\begin{cases} 4x + y + z + w = 6 \\ 3x + 7y - z + w = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w = -3 \\ x + y + z + 2w = 3 \end{cases}$$

- a) Utilitzant la regla de Cramer.
b) Utilitzant el mètode d'eliminació de Gauss.

13. Utilitzeu determinants per a calcular el rang de les matrius següents:

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0.3 & -2 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{(b)} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(c)} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \text{(d)} & \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & -6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14. Estudieu, segons els valors dels paràmetres, els sistemes següents:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{cases} & \text{b)} & \begin{cases} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 1-a \end{cases} \\ \text{c)} & \begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases} & \text{d)} & \begin{cases} kx + y + z + t = 1 \\ x + ky + z + t = k \\ x + y + kz + t = k^2 \\ x + y + z + kt = k^3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$e) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad f) \begin{cases} ax + 2y + 3z + u = 6 \\ x + 3y - z + 2u = b \\ 3x - ay + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z + 3u = 9 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} ax + by + cz + dt = d - c \\ x + 2y - 3z + 4t = 0 \\ y - z + 2t = 1. \end{cases}$$

15. Discutiu a \mathbb{C} els sistemes següents:

$$\begin{cases} x - ay + a^2z = a \\ ax - a^2y + az = 1 \\ ax + y - a^3z = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1. \end{cases}$$

16. Discutiu el sistema d'equacions següent en \mathbb{R} i resoleu-lo per a $\alpha = -3$ i $a = 2$,

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + t = 1 \\ x + 3y + 2\alpha z + 2t = 1 \\ 2x + 6y + 2z + \alpha t = a. \end{cases}$$

17. Si a $M(n, \mathbb{R})$ es defineix la relació $A \sim B$ si, i només si, $\det A \leq \det B$. Demostreu que és reflexiva, transitiva però no és simètrica ni antisimètrica.

18. Sigui A una matriu $n \times n$, demostreu que:

- $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$;
- si $\text{rang}(A) = n - 1$, llavors $\text{rang}(\text{adj}A) = 1$.

19. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ té exactament $(n - 1)$ elements no nuls, aleshores demostreu que $\det A = 0$.

20. Sigui A una matriu 2×2 tal que $A^2 = 0$. Demostreu que, per a tot a , $\det(aI - A) = a^2$.

21. Demostreu que si $A \in M(n, \mathbb{R})$ és una matriu ortogonal, $A^{-1} = A^t$, llavors $\det A^2 = 1$.

22. Si $n > 1$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $A \in M(n, \mathbb{R})$ són tals que $a_0 \neq 0$ i $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0$, demostreu que A és invertible.

23. Sigui A una matriu quadrada $n \times n$ formada per nombres enters entre 0 i 9. Demostreu que si les files o les columnes de A , llegides com un nombre amb x xifres, formen un nombre múltiple de 3 aleshores $\det A$ també serà múltiple de 3. Comproveu, sense fer explícitament els càlculs, que el determinant següent és múltiple de 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

9. Exercicis de recapitulació

La llista de problemes d'aquest capítol és un recull d'exercicis de temes diversos. En alguns d'ells intervenen conceptes de més d'un tema. D'altres són problemes d'exàmens de cursos anteriors d'Àlgebra i Àlgebra 1.

Exercicis

1. Demostreu per inducció:

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

2. Es considera l'aplicació $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x, y) = \log x - \log y.$$

Es defineix la relació associada a f de la forma següent: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y')$. Comproveu que és una relació d'equivalència i doneu una interpretació geomètrica de les seves classes.

3. Proveu que un conjunt finit totalment ordenat és un conjunt ben ordenat.

4. Demostreu que la composició d'aplicacions bijectives és bijectiva. És cert el recíproc? Justifiqueu la resposta.

5. Es considera l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} &\longrightarrow \{1, 2, \dots, n \cdot m\} \\ (i, j) &\longrightarrow (i-1)m + j. \end{aligned}$$

- a) Proveu que φ és bijectiva.
- b) Doneu un algorisme per calcular l'antiimatge d'un element.
- c) Calculeu $\varphi^{-1}(4843)$, en el cas $n = 130$, $m = 100$.
- d) Generalitzeu φ al cas

$$\{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, r\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n \cdot m \cdot r\}.$$

6. Sigui A un conjunt i $S \subset A$. Considereu la funció $\chi_s: A \rightarrow \{0, 1\}$ definida per

$$\chi_s(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in A \setminus S; \\ 1, & \text{si } a \in S. \end{cases}$$

Definiu ara l'aplicació $\sigma: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ del conjunt de parts de A al conjunt de totes les aplicacions de A a $\{0, 1\}$ posant $\sigma(S) = \chi_s$ per a qualsevol $S \in \mathcal{P}(A)$. Proveu que $\mathcal{P}(A)$ i $\{0, 1\}^A$ són equipotents, és a dir, que σ és bijectiva.

7. En el conjunt \mathbb{R} es defineix l'operació binària $x * y = 2xy + \alpha(x + y)$, on $\alpha \in \mathbb{R}$. Per a quins valors de α l'operació és associativa? Justifiqueu la resposta.

8. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Demostreu per inducció que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{1}{2} - 2^n + \frac{3^n}{2} \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1.$$

9. A $M(n, \mathbb{R})$ definim la relació $A \sim B \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$, $\forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$. És una relació d'equivalència?

10. Donada la matriu $A \in M(n, \mathbb{R})$, definim en $M(n, 1, \mathbb{R})$ la relació següent:

$$X \sim Y \Leftrightarrow A \cdot X = A \cdot Y$$

- Vegeu que és relació d'equivalència.
- Si A és invertible, trobeu la classe $[X]$ per $X \in M(n, 1, \mathbb{R})$ qualsevol.
- Trobeu la classe $[X]$ per $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, considerem el conjunt $F = \{B \in M(2, \mathbb{R}) : A \cdot B = \alpha A, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- Demostreu que si $X, Y \in F$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ aleshores $\lambda X + \mu Y \in F$.
- Demostreu per inducció que si $B \in F$, aleshores $B^n \in F$ per a tot $n \geq 1$.

12. Considerem la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$.

- Calculeu A^n , on $A = I - M$.
- Calculeu $B_n = I + A + A^2 + \dots + A^n$.
- Calculeu $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ i comproveu que $B = M^{-1}$.

13. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$. Proveu que si $k \neq 0$ no és possible trobar tres nombres reals x, y, z tals que $xA^2 + yA + zI_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Discutiïu segons els valors de $a, b, c \in \mathbb{R}$ i resoleu en tots els casos de indeterminació el sistema següent:

$$\begin{array}{rccccrcr} x & - & z & + & t & = & - & 4 \\ y & - & z & + & at & = & & 1 \\ x & - & y & + & t & = & & b \\ ax & + & y & - & z & = & & c \end{array}$$

15. Discutiïu i resoleu segons el paràmetre $a \in \mathbb{R}$ el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & ax_4 & + & 2ax_5 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & (a-1)x_5 & = & 4 \\ - & x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & - & x_4 & & = & 0 \end{array} \right.$$

16. Sigui $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

- Proveu que A és un subespai vectorial de \mathbb{R}^n ;
- Trobeu una base del subespai A . Quina és la seva dimensió?

17. Sigui $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Proveu que el conjunt format per les matrius que commuten amb A és un subespai vectorial de $M(2, \mathbb{R})$. Trobeu la dimensió i una base d'aquest subespai.

18. Siguin $U = \langle (1, 1, 3), (-1, 2, 3) \rangle$ i $V = \langle (2, 1, 2), (2, -1, -2) \rangle$ subespais de \mathbb{R}^3 . Calculeu les bases i dimensions dels subespais $U + V$ i $U \cap V$. Determineu els valors de a i b per tal que el vector $(a, 2a + 1, b)$ pertanyi al subespai $U \cap V$.

19. Considerem els subespais de \mathbb{R}^4 següents:

$$\begin{aligned} F &= \langle (1, 0, -1, 0), (2, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1) \rangle, \\ G &= \{(x, y, z, t) \mid x - 2y + z = 0, 2x + y - t = 0\}, \\ H_a &= \langle (3, 1, -1, 2), (1 + a, 1, 1 - a, a) \rangle \text{ on } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Calculeu la dimensió i trobeu una base dels subespais F , G i H_a segons els valors del paràmetre a . Són iguals els subespais $G \cap F$ i $G \cap H_a$?

20. Sigui V un \mathbb{K} -espai vectorial i $f : V \rightarrow V$ una aplicació que compleix per a tot $u, v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ i $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

A V es defineix la relació $u \sim v$ si, i només si, $f(u - v) = 0$ per a tot $u, v \in V$.

- Demostreu que \sim és una relació d'equivalència.

- b) Si f és a més injectiva, demostreu que si $u \sim v$ aleshores $u = v$.
- c) Si $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és l'aplicació definida per $f(x, y) = (3x + y, 9x + 3y)$.
Proveu que els elements $(0, 1)$ i $(1, -2)$ pertanyen a la mateixa classe d'equivalència.

21. Demostreu que l'espai vectorial E és suma directa de dos subespais V i W si, i només si, cada vector de E es pot expressar de manera única com a suma d'un vector de V i d'un de W .

22. Siguin V i W dos subespais de l'espai vectorial E . Demostreu que:

- a) si $E = V + W$, llavors $\dim(E) \leq \dim(V) + \dim(W)$;
 b) si $E = V \oplus W$, llavors $\dim(E) = \dim(V) + \dim(W)$;
 c) si $E = V + W$, llavors $\dim(E) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$.

23. Sigui $E = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $F = \{A \in M(3, \mathbb{R}) : A^t = -A\}$ i $G = \mathbb{R}^3$.
Considerem les aplicacions lineals $f : E \rightarrow F$ i $g : F \rightarrow G$ definides per:

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} 0 & -a - b & -b - c \\ a + b & 0 & -c \\ b + c & c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad g \left(\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \right) = (a, c + b, a + c).$$

- a) Trobeu les matrius associades a f , g i $g \circ f$ en les bases de E , F i G següents: $\{x^2, x, 1\}$,
 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ i $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- b) Proveu que g és bijectiva i calculeu $g^{-1}(V)$ on $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$.

24. Sigui $f : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal: $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + d, a, b - c, b - c + 2d)$

- a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

- b) Calculeu una base i la dimensió dels subespais $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.
 c) Trobeu les antiimatges del vector $v_1 = (-2, 1, 3, -3)$ i del vector $v_2 = (1, 2, 1, 2)$.
 d) Calculeu la matriu associada a f en les bases:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 0, -1, 1), (1, 0, 0, 2)\}.$$

25. Sigui $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi de grau 1 (no constant). Per a $n \geq 2$, considerem l'aplicació:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[x] &\rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) &\rightarrow r(x) \cdot p'(x) \end{aligned}$$

- proveu que f és lineal;
- determineu $\dim(\text{Ker } f)$ i $\text{rang}(f)$.

26. Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial, $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E i f un endomorfisme de E tal que $f(e_1 - e_2) = 0$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = 4e_2 + 5e_3$, $f(e_2 + e_3) = 3e_2 + 3e_3$. Calculeu $f(v)$ on $v = 3e_1 + 4e_2 + 6e_3$ i estudeu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

27. En \mathbb{R}^3 dos endomorfismes f i g tenen per matrius associades en una certa base

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivament,

- proveu que el conjunt $S = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = g(u)\}$ es un subespai vectorial de \mathbb{R}^3 i calculeu una base de S ;
- calculeu el $\text{rang}(g \circ f)$.

28. Donat l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m + 1)y + (m + 1)z)$$

demostreu que la dimensió del nucli és zero excepte per a valors particulars de m . Per a aquests valors doneu les dimensions i bases del nucli i de la imatge de f .

29. Sigui E un \mathbb{K} -espai vectorial, $\dim(E) = n > 1$ i f un endomorfisme en E tal que $f^n = 0$ i $f^{n-1} \neq 0$,

- demostreu que existeix $e \in E$ tal que $\{e, f(e), \dots, f^{n-1}(e)\}$ són linealment independents;
- calculeu la matriu de f en aquesta base;
- calculeu $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

30. Definim l'aplicació

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$p = a + bx + cx^2 \longrightarrow f(p) = a + bx.$$

Proveu que:

- f és un endomorfisme i que $f^2 = f$;
- $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}_2[x]$.

31. Sigui U un espai vectorial i $f : U \rightarrow U$ una aplicació lineal. Definim:

$$U_1 = \{u \in U : f(u) = u\}, \quad U_2 = \{u \in U : f(u) = -u\}.$$

Proveu que:

- $U_1 \cap U_2 = \{0\}$;
- $U = U_1 \oplus U_2$.

32. Sigui E un \mathbb{R} -espai vectorial, $\dim(E) = n$ i f un endomorfisme en E .

- Quina és la $\dim(E)$ si $\text{Ker } f = \text{Im } f$?
- Pot ser f isomorfisme si $\text{Ker } f = \text{Im } f$?
- Si $f^2 = 0$ quina és la relació entre $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$?
- Si $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Ker } f^2)$ quina és la relació entre $\text{Im } f$ i $\text{Im } f^2$?

33. Sigui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació lineal.

- Proveu que $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) = n$.
- Fent ús de l'apartat anterior, proveu que si $\dim(\text{Ker } f + \text{Im } f) = n/2$ llavors es compleix $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

34. Siguin U i W subespais d'un espai vectorial E . Demostreu mitjançant els passos indicats que

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

- Demostreu que l'aplicació $L : U \times W \rightarrow E$ donada per $L(u, w) = u - w$ és una aplicació lineal.
- Proveu que la imatge de L és $U + W$.
- Demostreu que el nucli de L és el subespai de $U \times W$ format pels elements (u, u) on $u \in U \cap W$. Trobeu una base i la dimensió d'aquest subespai.
- Apliqueu el teorema de la dimensió per concloure la demostració.

35. Demostreu que el determinant de qualsevol matriu antisimètrica $A \in M(n, \mathbb{R})$ amb n senar és zero.

36. Trobeu el valor de $n \in \mathbb{N}$, sabent que

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ n & n^2 & n^3 & 1 \\ n^2 & n^3 & 1 & n \\ n^3 & 1 & n & n^2 \end{vmatrix} = (80)^3.$$

10. Exàmens d'Àlgebra 1

En aquest capítol hem recollit els exàmens d'Àlgebra 1 a partir del curs 97-98 amb la idea de que l'alumne tingui una guia del grau de dificultat que es pot trobar en un examen.

1. Considerem tres conjunts A , X i Y . Demostreu que si $A \cup X = A \cup Y$ i $A \cap X = A \cap Y$ aleshores $X = Y$.

Solució:

$$\begin{aligned} X &= X \cap (X \cup A) = X \cap (Y \cup A) = (X \cap Y) \cup (X \cap A) = (X \cap Y) \cup (Y \cap A) = \\ &= (Y \cap X) \cup (Y \cap A) = Y \cap (X \cup A) = Y \cap (Y \cup A) = Y. \end{aligned}$$

2. En el conjunt $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es defineix l'operació $a * b = 2ab$. Estudieu si $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ té estructura de grup abelià i en cas afirmatiu resoleu l'equació $\frac{1}{2} * x^2 * \frac{3}{4} = 2 * x * (-3)$.

Solució:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ (a, b) &\longrightarrow a * b = 2ab \end{aligned}$$

Operació interna:

$$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2ab \in \mathbb{Q}$$

$$a, b \neq 0 \Rightarrow 2ab \neq 0.$$

Associativa:

$$a * (b * c) = a * (2bc) = 2a2bc = 4abc$$

$$(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc$$

Commutativa:

$$a * b = 2ab = 2ba = b * a$$

Element neutre:

$$a * e = e * a = a \Rightarrow 2ae = a \Rightarrow a(2e - 1) = 0 \Rightarrow e = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Element simètric:

$$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, a * a^{-1} = a^{-1} * a = \frac{1}{2} \implies a * a^{-1} = \frac{1}{2} \implies 2aa^{-1} = \frac{1}{2} \implies a^{-1} = \frac{1}{4a}.$$

Per tant $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ és grup abelià.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} * x^2 * \frac{3}{4} &= 2 * x * (-3), & x^2 * \frac{3}{4} &= x * 2 * (-3) \\ x^{-1} * x * x * \frac{3}{4} &= x^{-1} * x * 2 * (-3), & x * \frac{3}{4} &= 2 * (-3) \\ x * \frac{3}{4} * \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} &= 2 * (-3) * \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}, & x &= 2 * (-3) * \frac{1}{4^{\frac{3}{4}}} \\ x &= 2 * (-3) * \frac{1}{3}, & x &= (-12) * \frac{1}{3} \\ x &= 2(-12)\frac{1}{3} = -8. \end{aligned}$$

3. Resoleu l'equació matricial $A \cdot X = B - 3C$ on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució:

Si la matriu A és invertible aleshores

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3C) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - 3C)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \equiv_f \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & 20 & 12 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \\ \begin{pmatrix} 4 & -18 & -12 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 20 & 12 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\equiv_f \begin{pmatrix} 2 & -9 & -6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, & B - 3C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -21 & -8 & -13 \\ -22 & -10 & -14 \\ 27 & 13 & 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Discutiu segons els valors de λ el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \\ x & + & y & + & \lambda z & = & \lambda^2 \end{array} \right\}.$$

Solució:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{pmatrix} \equiv_f$$

$$\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & 1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix},$$

$$2 - \lambda - \lambda^2 = 0 \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2. \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 1, -2$ aleshores $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ i el sistema és S.C.D.

Si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x + y + z = 1, \quad x = 1 - y - z \quad \text{el sistema és S.C.I.}$$

Si $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 0x + 0y + 0z = 3, \quad \text{el sistema és S.I.}$$

5. Siguin $a_1 = (1, -1, 0, 2)$, $a_2 = (-1, -1, 2, 1)$, $a_3 = (3, 0, 1, 1)$, $a_4 = (-2, -3, 1, 4)$, vectors del \mathbb{R} -espai vectorial \mathbb{R}^4 . Determineu si són linealment dependents o independents. En cas que siguin linealment dependents expresseu un dels vectors com a combinació lineal dels altres.

Solució:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_3 - 3a_1 \\ a_4 + 2a_1 \end{matrix} \equiv_f$$

$$\begin{aligned} &\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ 2(a_3 - 3a_1) + 3(a_1 + a_2) \\ 2(a_4 + 2a_1) - 5(a_1 + a_2) \end{matrix} \equiv_f \\ &\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \\ 2a_3 - 3a_1 + 3a_2 \\ 2a_4 - a_1 - 5a_2 + 2a_3 - 3a_1 + 3a_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Els quatre vectors són linealment dependents ja que l'última fila és el vector zero.

$$2a_4 - a_1 - 5a_2 + 2a_3 - 3a_1 + 3a_2 = 0$$

$$2a_4 = a_1 + 5a_2 - 2a_3 + 3a_1 - 3a_2 = 4a_1 + 2a_2 - 2a_3$$

$$a_4 = 2a_1 + a_2 - a_3.$$

1. Siguin f i g dos endomorfismes d'un \mathbb{K} -espai vectorial E tals que $f \circ g = g \circ f$. Demostreu:

- a) $f(\text{Ker } g) \subset \text{Ker } g$;
 b) $f(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$.

Solució:

- a) $\forall x, x \in f(\text{Ker } g) \Rightarrow x = f(y), y \in \text{Ker } g \Rightarrow$
 $\Rightarrow g(x) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(0) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in \text{Ker } g \Rightarrow f(\text{Ker } g) \subset \text{Ker } g$;
 b) $\forall x, x \in f(\text{Im } g) \Rightarrow x = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = (g \circ f)(y) = g(f(y)) \in \text{Im } g \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$.

2. Demostreu que el conjunt T de matrius triangulars:

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

té estructura de grup amb el producte. És abelià? Justifiqueu la resposta.

Solució:

i) L'operació del producte és interna:

$$\forall A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & x+a & y+az+b \\ 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$$

ja que $A \cdot B$ és triangular i els seus termes són enters.

ii) El producte de matrius és associatiu.

iii) La matriu

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és l'element neutre del producte de matrius d'ordre 3 i $I_3 \in T$.

iv) Les matrius de T són invertibles, ja que el seu determinant és 1. Per tant, per cada $A \in T$ existeix A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_3$. Si $A \in T$ llavors $A^{-1} \in T$ ja que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T.$$

v) El producte no és commutatiu, ja que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. A l'espai vectorial $M(2, \mathbb{R})$ considerem la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definim l'aplicació $f_A : M(2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2, \mathbb{R})$ per $f_A(X) = A \cdot X$.

- Demostreu que f_A és endomorfisme;
- trobeu la matriu associada a f_A en la base canònica de $M(2, \mathbb{R})$;
- calculeu $\text{Ker } f_A$ i $\text{Im } f_A$;
- calculeu la matriu associada a f_A en la base:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solució:

a) demostrem que f_A és lineal:

- $\forall X, Y \in M(2, \mathbb{R}), \quad f_A(X+Y) = A \cdot (X+Y) = A \cdot X + A \cdot Y = f_A(X) + f_A(Y)$;
- $\forall X \in M(2, \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_A(\lambda X) = A \cdot (\lambda X) = \lambda(A \cdot X) = \lambda f_A(X)$.

b)

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu associada a f_A en la base canònica és:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\text{Ker } f_A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid f_A \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = -x, t = -y,$$

$$\text{Ker } f_A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \dim(\text{Ker } f_A) = 2.$$

$$\text{Im } f_A = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

$$\Rightarrow \text{Im } f_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ i } \dim(\text{Im } f_A) = 2.$$

d)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\begin{array}{ccc}
 M(2, \mathbb{R})_{\mathcal{B}_e} & \xrightarrow{B} & M(2, \mathbb{R})_{\mathcal{B}_e} \\
 P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\
 M(2, \mathbb{R})_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{C} & M(2, \mathbb{R})_{\mathcal{B}}
 \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Donats els subespais vectorials de \mathbb{R}^4 , $F = \langle (1, 0, 2, 1), (3, 1, 2, -1), (0, -1, a, 4) \rangle$ i $G = \{(x, y, z, t) \mid 2x + 3y + z - 2t = 0, y = 0\}$, trobeu una base i la dimensió de F , G , $F + G$ i $F \cap G$ segons els valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

Solució:

i) Base i dimensió de F :

$$F = \langle (1, 0, 2, 1), (3, 1, 2, -1), (0, -1, a, 4) \rangle,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a & 4 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & a & 4 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Si $a = 4$:

$$\dim(F) = 2, F = \langle f_1 = (1, 0, 2, 1), f_2 = (0, 1, -4, -4) \rangle.$$

• Si $a \neq 4$:

$$\dim(F) = 3, F = \langle f_1 = (1, 0, 2, 1), f_2 = (0, 1, -4, -4), f_3 = (0, 0, a-4, 0) \rangle.$$

ii) Base i dimensió de G :

$$\begin{aligned}
 G &= \{(x, y, z, t) \mid 2x + 3y + z - 2t = 0, y = 0\} = \{(x, y, z, t) \mid 2x + z - 2t = 0, y = 0\} = \\
 &= \{(x, 0, -2x + 2t, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \langle g_1 = (1, 0, -2, 0), g_2 = (0, 0, 2, 1) \rangle,
 \end{aligned}$$

aleshores $\dim(G) = 2$.

iii) Base i dimensió de $F + G$ i $F \cap G$:

- Si $a = 4$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ g_1 \\ g_2 \end{matrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ g_1 - f_1 \\ g_2 \end{matrix} \equiv_f \\ & \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ g_1 - f_1 + 2g_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Per tant, $\dim(F + G) = 4$, $F + G = \mathbb{R}^4$, $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 4 = 0$ i $F \cap G = \{0\}$.

- Si $a \neq 4$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{matrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_1 - f_1 \\ g_2 \end{matrix} \equiv_f \\ & \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_2 \\ g_1 - f_1 + 2g_2 \end{matrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ g_2 - g_1 + f_1 - 2g_2 \\ g_1 - f_1 + 2g_2 \end{matrix} \equiv_f \\ & \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \frac{1}{2}(-g_2 - g_1 + f_1) \\ g_1 - f_1 + 2g_2 \end{matrix} \equiv_f \\ & \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 - \frac{a-4}{2}(-g_2 - g_1 + f_1) \\ \frac{1}{2}(-g_2 - g_1 + f_1) \\ g_1 - f_1 + 2g_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Per tant, $\dim(F + G) = 4$, $F + G = \mathbb{R}^4$, $\dim(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1$

$$f_3 - \frac{a-4}{2}(-g_2 - g_1 + f_1) = 0 \Rightarrow \frac{a-4}{2}f_1 - f_3 = \frac{a-4}{2}(g_1 + g_2) \in F \cap G,$$

$$F \cap G = \left\langle \frac{a-4}{2}(g_1 + g_2) \right\rangle = \left\langle \frac{a-4}{2}(1, 0, 0, 1) \right\rangle = \langle (1, 0, 0, 1) \rangle.$$

 ÀLGEBRA 1 curs: 1997-1998

Diplomatura d'Estadística. FME-UPC

Examen d'estiu

8 de juliol de 1998

1. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ dues bases de \mathbb{R}^3 . Un vector u de \mathbb{R}^3 té components (x, y, z) en la primera base i (x', y', z') en la segona. Expressen x , y i z en funció de x' , y' i z' .

Primera solució:

Siguin

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

les matrius que tenen per columnes l'expressió dels vectors de \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2 respecte a la base canònica.

Notem les coordenades de u respecte a la base canònica per (x_0, y_0, z_0) . Llavors:

$$P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad Q \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \implies P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(x' - y' + z') \\ y &= \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ z &= \frac{1}{2}(x' + y' - z'). \end{aligned}$$

Segona solució:

$$u = x(2, 1, 1) + y(1, 2, 1) + z(1, 1, 2) = x'(1, 0, 1) + y'(0, 1, 1) + z'(1, 1, 0) \implies$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= x' + z' \\ x + 2y + z &= y' + z' \\ x + y + 2z &= x' + y' \end{aligned} \implies$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x' + z' \\ 1 & 2 & 1 & y' + z' \\ 1 & 1 & 2 & x' + y' \end{array} \right) &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x' + y' \\ 0 & 1 & -1 & z' - x' \\ 0 & -1 & -3 & x' + z' - 2x' - 2y' \end{array} \right) \equiv_f \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x' + z' \\ 0 & 1 & -1 & z' - x' \\ 0 & 0 & -4 & -2x' - 2y' + 2z' \end{array} \right) &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x' + z' \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x' + y' - z') \end{array} \right) \equiv_f \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x' + z' - (x' + y' - z') \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x' + y' - z') \end{array} \right) &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x' - y' + z') \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x' + y' - z') \end{array} \right) \implies \\ x &= \frac{1}{2}(x' - y' + z') \\ y &= \frac{1}{2}(-x' + y' + z') \\ z &= \frac{1}{2}(x' + y' - z'). \end{aligned}$$

2. Considereu els subespais de \mathbb{R}^4 següents:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (\lambda - 1)x + (\lambda + 1)z + t = 0, \quad x + y + z - t = 0\},$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (2\lambda + 1)x + y + z = 0, \quad x + y - \lambda z = 0\}.$$

- a) Comproveu que per a qualsevol valor de λ , $\dim(U) = \dim(V) = 2$.
 b) Determineu els valors de λ tals que $\dim(U + V) = 3$.

Primera solució:

a) U : vectors solució del sistema homogeni:

$$\begin{array}{cccc|c} (\lambda - 1)x & & & & 0 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \implies A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\dim(U)$ = nombre de graus de llibertat del sistema = nombre d'incògnites $-rg(A)$.

$$rg(A) = rg \left(\begin{array}{cccc} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) = 2, \quad \forall \lambda \implies \dim(U) = 4 - 2 = 2, \quad \forall \lambda.$$

V : el mateix pel sistema:

$$\begin{array}{cccc|c} (2\lambda + 1)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array} \implies A = \left(\begin{array}{cccc|c} (2\lambda + 1) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\dim(V)$ = nombre de graus de llibertat del sistema = nombre d'incògnites $-rg(A)$.

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} (2\lambda+1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 & \text{si } \lambda = -1 \\ rg \begin{pmatrix} (2\lambda+1) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = 2 & \text{si } \lambda \neq -1 \end{cases}$$

$$\dim(V) = 4 - 2 = 2, \forall \lambda.$$

b) Valors de λ tals que $\dim(U + V) = 3$,

$3 = \dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - \dim(U \cap V) \implies \dim(U \cap V) = 1$: cal trobar λ tal que $\dim(U \cap V) = 1$, pero $U \cap V$ està format pels vectors solució del sistema homogeni:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x & + & (\lambda + 1)z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ (2\lambda + 1)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & \lambda z & = & 0 \end{cases}, A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ (2\lambda + 1) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \end{array} \right)$$

per tant, $\dim(U \cap V) = \text{nombre de graus de llibertat del sistema} = 4 - rg(A) = 1 \iff rg(A) = 3$.

$rg(A) = 3 \implies \det(A) = 0$. Calculem λ per tal que $\det(A) = 0$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2\lambda + 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{if } -1f+2f \text{ i permutar}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda + 2 & 0 \\ 2\lambda + 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \stackrel{3f-2f, 4f-2f}{=} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & \lambda + 2 & 0 \\ \lambda + 1 & 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 1 - \lambda & 0 & -2\lambda - 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda + 2 & 1 & 0 \\ \lambda + 1 & -\lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 - \lambda & -2\lambda - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\lambda - 1 \\ 1 - \lambda & -2\lambda - 2 \end{vmatrix} = \\ = (\lambda + 1)(-2\lambda - 2) - (-\lambda - 1)(1 - \lambda) = \dots = (\lambda + 1)(-3\lambda - 1) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

• Per $\lambda = -1$:

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

• Per $\lambda = -\frac{1}{3}$:

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Resumint:

$$\lambda = -1 \text{ ó } \lambda = -\frac{1}{3} \implies \dim(U \cap V) = 1 \implies \dim(U + V) = 3,$$

$$\lambda \neq -1, -\frac{1}{3} \implies \operatorname{rg}(A) = 4 \implies \dim(U \cap V) = 0 \implies \dim(U + V) = 4,$$

Per tant, els valors de λ tals que $\dim(U + V) = 3$ són $\lambda = -1$ ó $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Segona solució:

i) Base de U : resollem el sistema homogeni corresponent:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{2f \leftarrow 2f+1f}{\equiv_f} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t = -(\lambda - 1)x - (\lambda + 1)z \\ y = -\lambda x - (\lambda + 2)z. \end{cases}$$

$$U = \{(x, -\lambda x - (\lambda + 2)z, z, -(\lambda - 1)x - (\lambda + 1)z) \mid x, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x(1, -\lambda, 0, -\lambda + 1) + z(0, -2 - \lambda, 1, -\lambda - 1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Base de } U: \{(1, -\lambda, 0, -\lambda + 1), (0, -2 - \lambda, 1, -\lambda - 1)\}, \forall \lambda,$$

$$\dim(U) = 2, \forall \lambda.$$

ii) Base de V : resollem el sistema homogeni

$$\begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1f \leftarrow 1f-2f}{\equiv_f} \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 1 + \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

• Si $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = -x, \end{cases}$$

$$V = \{(x, -x, 0, t) \mid x, t \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1) \mid x, t \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Base de } V \text{ si } \lambda = 0: \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

• Si $\lambda \neq 0$:

$$\stackrel{1f \leftarrow 1f/2\lambda}{\equiv_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\lambda}{2\lambda} & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \stackrel{2f \leftarrow 2f-1f}{\equiv_f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\lambda}{2\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda - \frac{1+\lambda}{2\lambda} & 0 \end{pmatrix} \equiv_f$$

$$\equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\lambda}{2\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2\lambda^2 - \lambda - 1}{2\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x = -\frac{1+\lambda}{2\lambda} \\ y = \frac{2\lambda^2 + \lambda + 1}{2\lambda}. \end{cases}$$

$$V = \left\{ \left(-\frac{1+\lambda}{2\lambda} z, \frac{2\lambda^2 + \lambda + 1}{2\lambda} z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ z \left(-\frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda^2 + \lambda + 1}{2\lambda}, 1, 0 \right) + t(0, 0, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Base de V si $\lambda \neq 0$:

$$\{(-1 - \lambda, 2\lambda^2 + \lambda + 1, 2\lambda, 0), (0, 0, 0, 1)\} \implies \dim(V) = 2.$$

Observem que si en aquesta base substituïm λ per 0 obtenim els vectors $(-1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ que són una base de V per $\lambda = 0$.

Per tant, $U + V$ és el subespai generat pels vectors

$$\langle (1, -\lambda, 0, -\lambda + 1), (0, -2 - \lambda, 1, -\lambda - 1), (-1 - \lambda, 2\lambda^2 + \lambda + 1, 2\lambda, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & -\lambda + 1 \\ 0 & -2 - \lambda & 1 & -\lambda - 1 \\ -1 - \lambda & 2\lambda^2 + \lambda + 1 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dim(U + V) = \operatorname{rg}(A) = 3 \implies \det(A) = 0$$

$$\det(A) = -(3\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\lambda \neq -1, -\frac{1}{3} \implies \operatorname{rg}(A) = 4 = \dim(U + V)$$

$\lambda = -1$:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$\lambda = -\frac{1}{3}$:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\implies (\dim(U + V) = 3 \iff \lambda = -1 \text{ ó } -\frac{1}{3}).$$

3. Sabem que la matriu associada a l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ respecte a la base $\mathcal{B} = \{(4, -4, 1), (0, -4, 1), (1, -1, 0)\}$ és diagonal i que es compleix $f(2, 2, 0) = (16, -24, 4)$. Calculeu la matriu associada a f respecte a la base canònica.

Primera solució:

Expressem $(2, 2, 0)$ respecte de \mathcal{B} :

$$(2, 2, 0) = a(4, -4, 1) + b(0, -4, 1) + c(1, -1, 0) \implies \begin{array}{rcl} 4a & + & c = 2 \\ -4a - 4b - c & = & 2 \\ a + b & = & 0. \end{array}$$

Resolem el sistema obtingut:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & -1 & 2 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \equiv_f \\ &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \implies \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2. \end{array} \\ &\implies (2, 2, 0) = (4, -4, 1) - (0, -4, 1) - 2(1, -1, 0) \implies \\ &\implies f(2, 2, 0) = f(4, -4, 1) - f(0, -4, 1) - 2f(1, -1, 0). \end{aligned}$$

La matriu associada a f en la base \mathcal{B} és diagonal:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \implies f(e_1) = \alpha e_1, f(e_2) = \beta e_2, f(e_3) = \gamma e_3$$

$$\implies f(2, 2, 0) = \alpha(4, -4, 1) - \beta(0, -4, 1) - 2\gamma(1, -1, 0) = (16, -24, 4).$$

Resolem el sistema:

$$\begin{array}{rclcl} 4\alpha & & - & 2\gamma & = & 16 \\ - & 4\alpha & + & 4\beta & + & 2\gamma & = & -24 \\ & \alpha & - & \beta & & & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 16 \\ -4 & 4 & 2 & -24 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -12 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

$$\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\implies \alpha = 2, \beta = -2, \gamma = -4.$$

A = matriu associada en la base canònica,

$$B = \text{matriu associada en la base } \mathcal{B} : B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$P = \text{matriu de canvi de base: } P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies A = P \cdot B \cdot P^{-1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Segona solució:

A = matriu associada en la base canònica,

$$B = \text{matriu associada en la base } \mathcal{B}: B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

$$P = \text{matriu de canvi de base: } P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calculem la inversa: } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -16 \end{pmatrix}.$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \implies A = P \cdot B \cdot P^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - \gamma & 4(\alpha - \gamma) \\ \beta - \alpha & -\alpha + \beta + \gamma & -4\alpha + 4\gamma \\ \frac{\alpha - \beta}{4} & \frac{\alpha - \beta}{4} & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - \gamma & 4(\alpha - \gamma) \\ \beta - \alpha & -\alpha + \beta + \gamma & -4\alpha + 4\gamma \\ \frac{\alpha - \beta}{4} & \frac{\alpha - \beta}{4} & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Resolem el sistema i obtenim $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$. Substituint:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Considerem la propietat $P(n)$: $(n+1)! > 2^{n+3}$. Demostreu que per a tot natural $n \geq 0$, si $P(n)$ és certa, llavors $P(n+1)$ és certa. A partir de quin valor de $n \in \mathbb{N}$ és certa?

Solució:

$$\forall n \geq 0, P(n) \text{ és certa} \stackrel{?}{\implies} P(n+1) \text{ és certa}$$

$$(n+1)! > 2^{n+3} \stackrel{?}{\implies} (n+2)! > 2^{n+4}$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)! \underset{H.I.}{>} (n+2) \cdot 2^{n+3} \underset{n \geq 0}{\geq} 2 \cdot 2^{n+3} = 2^{n+4}.$$

Per	$n = 0 :$	1	$=$	$1!$	$>$	2^{0+3}	$=$	8	$fals$
	$n = 1 :$	2	$=$	$2!$	$>$	2^{1+3}	$=$	16	$fals$
	$n = 2 :$	6	$=$	$3!$	$>$	2^{2+3}	$=$	32	$fals$
	$n = 3 :$	24	$=$	$4!$	$>$	2^{3+3}	$=$	64	$fals$
	$n = 4 :$	120	$=$	$5!$	$>$	2^{4+3}	$=$	128	$fals$
	$n = 5 :$	720	$=$	$6!$	$>$	2^{5+3}	$=$	256	$cert !$

$$\implies \forall n \geq 5, (n+1)! > 2^{n+3}$$

2. Sigui $f : X \rightarrow Y$ una aplicació. Definim en X la relació \mathcal{R} :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

- a) Demostreu que \mathcal{R} és una relació d'equivalència.
 b) Determineu les classes d'equivalència en el cas $X = Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1000\}$ i $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Quants elements té el conjunt quocient X/\mathcal{R} ?

Solució:

a) \mathcal{R} és:

reflexiva: $\forall x \in X, x\mathcal{R}x \iff f(x) = f(x)$, cert,

simètrica: $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y) \iff f(y) = f(x) \iff y\mathcal{R}x,$

transitiva: $\forall x, y, z \in X, \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{cases} \implies f(x) = f(z) \implies x\mathcal{R}z.$

b) Classes d'equivalència

$x \in X \implies$ la classe de x és: $\bar{x} = \{y \in X \mid f(x) = f(y)\} = \{y \in X \mid [x] = [y]\}.$

Si $x \in \mathbb{Z}, [x] = x,$ i a més: $y \in X, y \in \bar{x} \iff [x] = [y] \iff [y] = x \iff x \leq y < x + 1.$

Per tant $\bar{x} = \{y \in X \mid x \leq y < x + 1\},$ és a dir:

$$\bar{0} = [0, 1),$$

$$\bar{1} = [1, 2),$$

...

$$\overline{999} = [999, 1000),$$

$$\overline{1000} = \{1000\}$$

$\forall y \in X, y$ és d'alguna de les classes anteriors, per tant:

$$X/\mathcal{R} = \{\bar{n} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ i } 0 \leq n \leq 1000\} \text{ on } \begin{cases} \bar{n} = [n, n + 1), & \text{si } 0 \leq n < 1000 \\ \overline{1000} = \{1000\} \end{cases}$$

i hi ha les 1000 i una classes d'equivalència:

$$|X/\mathcal{R}| = 1001.$$

3. Donada la matriu $A \in M(3, \mathbb{R}),$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tals que $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = O.$

b) Calculeu $A^{-1}.$

c) Doneu una PAQ -reducció de la matriu $A.$

Solució:

a) Calculem $A^2, A^3:$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

per tant:

$$\begin{aligned} & A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 + \gamma & \alpha & 3 + \beta \\ 3 + \beta & 1 + 3\alpha + \gamma & 9 + \alpha + 3\beta \\ \alpha & 3 + \beta & 1 + 3\alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \gamma + 1 = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3 + \beta = 0 \end{cases} \implies \\ & \implies \gamma = -1, \alpha = 0, \beta = -3. \end{aligned}$$

Substituint aquests valors a l'expressió $A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = O$ obtenim :

$$A^3 - 3A - I_3 = O \implies \alpha = 0, \beta = -3, \gamma = -1.$$

b) Per l'apartat a),

$$\begin{aligned} & A^3 - 3A - I_3 = O \implies A^3 - 3A = I_3 \implies \begin{cases} A \cdot (A^2 - 3I_3) = I_3 \\ (A^2 - 3I_3) \cdot A = I_3 \end{cases} \implies \\ & \implies A^{-1} = A^2 - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Per ser A inversible, $A^{-1} \cdot A = I_3$. Una possible PAQ -reducció la tenim per

$$\begin{cases} P = A^{-1} \\ Q = I_3, \end{cases} \quad P \cdot A \cdot Q = A^{-1} \cdot A \cdot I_3 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Demostreu que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q}$ amb l'operació $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$ té estructura de grup. És abelià? Resoleu l'equació $(3, 4) * (x, y) * (1, -2) = (6, 3)$.

Solució:

i) $*$ és una operació binària interna en $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q}$:

$$(a, b), (c, d) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q} \implies \begin{cases} a, c \in \mathbb{Q}, a, c \neq 0 \\ b, d \in \mathbb{Q} \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} ac \in \mathbb{Q}, ac \neq 0 \\ bc + d \in \mathbb{Q} \end{cases} \implies (a, b) * (c, d) = (ac, bc + d) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q}$$

ii) * és associativa:

$$\begin{aligned} ((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (ac, bc + d) * (e, f) = (ace, (bc + d)e + f) = (ace, bce + de + f) \\ (a, b) * ((c, d) * (e, f)) &= (a, b) * (ce, de + f) = (ace, bce + de + f) \end{aligned}$$

Per tant, * és associativa.

iii) * té element neutre:

$$(a, b) * (e, f) = (a, b) \iff \begin{cases} ae = a \\ be + f = b \end{cases} \iff \begin{cases} e = 1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ f = 0 \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Comprovem que: $(1, 0) * (a, b) = (a, b)$.

Per tant, $(1, 0)$ és l'element neutre.

iv) * té l'element simètric:

$$(a, b) * (a', b') = (1, 0) \implies \begin{cases} aa' = 1 \\ ba' + b' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ b' = -ba' = -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$(a, b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = (1, 0)$$

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a, b) = (1, -b + b) = (1, 0)$$

Per tant, $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ és l'element invers de (a, b) .

v) No és abelià:

$$(1, 2) * (0, 1) = (0, 1) \neq (0, 3) = (0, 1) * (1, 2)$$

vi) Resolem l'equació $(3, 4) * (x, y) * (1, -2) = (6, 3)$.

$$((3, 4) * (x, y)) * (1, -2) = (3x, 4x + y) * (1, -2) = (3x, 4x + y - 2) = (6, 3) \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 6 \\ 4x + y - 2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \iff (x, y) = (2, -3).$$

1. Siguin E i F \mathbb{K} -espais vectorials i f una aplicació lineal de E en F . Definim en E la relació binària següent:

$$\forall u, v \in E, \quad u \sim v \iff f(u - v) = \vec{0}_F.$$

- a) Comproveu que \sim és una relació d'equivalència en E .
 b) Demostreu que la classe d'equivalència del vector $\vec{0}_E$ és $\text{Ker } f$.

Solució:

- a) \sim és una relació d'equivalència en E :

\sim reflexiva: $u \sim u$?

$u \sim u \iff f(u - u) = \vec{0}_F$, però $f(u - u) = f(0_E) = \vec{0}_F$ per ser f aplicació lineal.

\sim simètrica: $u \sim v \implies v \sim u$?

$u \sim v \iff f(u - v) = \vec{0}_F \implies f(v - u) = f(-(u - v)) = -f(u - v) = \vec{0}_F$.

\sim transitiva: $u \sim v, v \sim w \implies u \sim w$?

$$\begin{cases} u \sim v \implies f(u - v) = \vec{0}_F \\ v \sim w \implies f(v - w) = \vec{0}_F \end{cases} \implies$$

$$\implies f(u - w) = f(u - v + v - w) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} f(u - v) + f(v - w) = \vec{0}_F + \vec{0}_F = \vec{0}_F.$$

- b) La classe d'equivalència de $\vec{0}_E$ és $\text{Ker } f$:

$$[\vec{0}_E] = \{v \in E \mid f(\vec{0}_E - v) = \vec{0}_F\} \stackrel{f \text{ lineal}}{=} \{v \in E \mid f(\vec{0}_E) - f(v) = \vec{0}_F\} =$$

$$\stackrel{f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F}{=} \{v \in E \mid f(v) = \vec{0}_F\} = \text{Ker } f.$$

2. Siguin F i G subespais vectorials de \mathbb{R}^5 tals que:

$$F = \langle (1, 1, 1, -1, -1), (1, a, 0, 0, 1) \rangle,$$

$$G = \{(x, y, z, t, u) \mid x - z - u = 0, y - 2t + u = 0\}.$$

Trobeu una base i la dimensió dels subespais F , G , $F + G$, $F \cap G$ segons els valors de $a \in \mathbb{R}$. És $F + G$ suma directa en algun cas?

Solució:

F :

$$\dim(F) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ ja que } \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Per tant, $\forall a \in \mathbb{R} : \dim(F) = 2$, una base és: $\{(1, 1, 1, -1, -1), (1, a, 0, 0, 1)\}$.

G :

$$\text{resolem el sistema homogeni: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = z + u \\ y = 2t - u, \end{cases} z, t, u \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies (x, y, z, t, u) = (z + u, 2t - u, z, t, u) =$$

$$= z(1, 0, 1, 0, 0) + t(0, 2, 0, 1, 0) + u(1, -1, 0, 0, 1), \quad z, t, u \in \mathbb{R} \implies$$

$$\implies \dim(G) = 3, \quad \text{base de } G : \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 2, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0, 1)\}.$$

$F + G$, $F \cap G$: anomenem

$$f_1 = (1, 1, 1, -1, -1), \quad f_2 = (1, a, 0, 0, 1),$$

$$g_1 = (1, 0, 1, 0, 0), \quad g_2 = (0, 2, 0, 1, 0), \quad g_3 = (1, -1, 0, 0, 1),$$

fem transformacions per files a la matriu que té tots aquests vectors per files per trobar base i dimensió de $F + G$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 - g_1 \\ f_1 - g_1 \\ f_2 - g_1 \end{matrix} \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & a+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} g_1 \\ f_1 - g_1 \\ g_2 - 2(f_1 - g_1) = -2f_1 + 2g_1 + g_2 \\ (g_3 - g_1) + (f_1 - g_1) = f_1 - 2g_1 + g_3 \\ (f_2 - g_1) - a(f_1 - g_1) = -af_1 + f_2 + (a-1)g_1 \end{array} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} g_1 \\ f_1 - g_1 \\ f_1 - 2g_1 + g_3 \\ -2f_1 + 2g_1 + g_2 \\ -(a+1)f_1 + f_2 + (a+1)g_1 - g_3 \end{array} \equiv \end{aligned}$$

- Si $a = -1$, llavors $a + 1 = 0$ i $rg(A) = 4 \implies$

$$\begin{aligned} \implies &\begin{cases} \dim(F + G) = 4 \\ \text{una base de } F + G : \{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1, -1), (0, 0, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 3, 2)\} \end{cases} \\ \dim(F + G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \implies 4 = 2 + 3 - \dim(F \cap G) \implies \\ &\implies \dim(F \cap G) = 1. \end{aligned}$$

L'última fila dona el vector $\vec{0}$, per tant $f_2 - g_3 = \vec{0} \implies f_2 = g_3 \in F \cap G$, per tant:

$$\begin{cases} \dim(F \cap G) = 1 \\ \text{una base de } F \cap G : \{(1, -1, 0, 0, 1)\}. \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$, llavors $a + 1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} rg(A) &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dim(F + G) = 5 \implies F + G = \mathbb{R}^5 \\ \text{una base de } F \cap G : \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\} \end{cases} \\ \dim(F + G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \implies 5 = 2 + 3 - \dim(F \cap G) \implies \\ &\implies \dim(F \cap G) = 0, \end{aligned}$$

per tant:

$$\begin{cases} \dim(F \cap G) = 0, F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \text{no admet base} \end{cases}$$

$F + G$ és suma directa si, i només si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$, és a dir, si, i només si, $a \neq -1$.

3. Considerem les aplicacions lineals: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$ i $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $g(x, y) = (x - 2y, y - 2x)$.

- Demostreu que la composició d'aplicacions lineals qualssevol és una aplicació lineal.
- Doneu la imatge d'un vector qualsevol $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ per $g \circ f$.
- Calculeu una base i la dimensió de $\text{Im}(g \circ f)$ i de $\text{Ker}(g \circ f)$. És $g \circ f$ injectiva, exhaustiva o bijectiva?
- Calculeu la matriu associada a $g \circ f$ en les bases $\{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 i $\{(3, -2), (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 .
- Demostreu per inducció que la matriu associada a l'endomorfisme g^n respecte a la base canònica de \mathbb{R}^2 és:

$$A_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 1.$$

Solució:

- La composició d'aplicacions lineals és aplicació lineal:

Cal veure:

$$\begin{cases} (i) & (g \circ f)(u + v) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v), \quad \forall u, v \in E \\ (ii) & (g \circ f)(\lambda u) = \lambda(g \circ f)(u), \quad \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

on $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ i E, F, G són \mathbb{K} -espais vectorials.

$$(i) \quad (g \circ f)(u + v) \stackrel{\text{def. } g \circ f}{=} g(f(u + v)) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} g(f(u) + f(v)) \stackrel{g \text{ lineal}}{=} \\ \stackrel{g \text{ lineal}}{=} g(f(u)) + g(f(v)) \stackrel{\text{def. } g \circ f}{=} (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$$

$$(ii) \quad (g \circ f)(\lambda u) \stackrel{\text{def. } g \circ f}{=} g(f(\lambda u)) \stackrel{f \text{ lineal}}{=} g(\lambda f(u)) \stackrel{g \text{ lineal}}{=} \lambda g(f(u)) \stackrel{\text{def. } g \circ f}{=} \lambda(g \circ f)(u).$$

- Imatge de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ per $g \circ f$, on $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Calculem:

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) \stackrel{\text{def. } f}{=} g(x + y, y - z) \stackrel{\text{def. } g}{=} \\ \stackrel{\text{def. } g}{=} ((x + y) - 2(y - z), y - z - 2(x + y)) = (x - y + 2z, -2x - y - z).$$

- Base i dimensió de $\text{Im}(g \circ f), \text{Ker}(g \circ f)$. És $g \circ f$ injectiva, exhaustiva o bijectiva?

Ho trobem utilitzant la matriu associada a $g \circ f$ en bases canòniques de \mathbb{R}^3 i \mathbb{R}^2 :

$$\text{per l'apartat b), } \begin{cases} (g \circ f)(1, 0, 0) = (1, -2) \\ (g \circ f)(0, 1, 0) = (-1, -1) \\ (g \circ f)(0, 0, 1) = (2, -1) \end{cases}$$

la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques $\mathcal{C}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 i $\mathcal{C}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(\text{Im}(g \circ f)) = \text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \implies$$

$$\implies \text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2, \quad \text{una base de } \text{Im}(g \circ f) \text{ és } \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

$$\dim(\text{Ker}(g \circ f)) + \dim(\text{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathbb{R}^3),$$

per tant $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) = 3 - 2 = 1$. Per calcular una base de $\text{Ker}(g \circ f)$ resollem el sistema homogeni $A \cdot X = O$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \\ &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

Solució: $(-z, z, z) = z(-1, 1, 1), z \in \mathbb{R} \implies$ base de $\text{Ker}(g \circ f)$: $\{(-1, 1, 1)\}$.

$\text{Ker}(g \circ f) \neq \{(0, 0, 0)\}$, per tant $g \circ f$ no és injectiva.

$\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$, per tant $g \circ f$ és exhaustiva.

- d) Matriu associada a $g \circ f$ en les noves bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 i $\mathcal{B}_2 = \{(3, -2), (1, -1)\}$ de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\text{ base } \mathcal{C}_1} & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{R}^2_{\text{ base } \mathcal{C}_2} \\ Id \uparrow P & & Q \downarrow Id \\ \mathbb{R}^3_{\text{ base } \mathcal{B}_1} & \xrightarrow[g \circ f]{B} & \mathbb{R}^2_{\text{ base } \mathcal{B}_2} \end{array}$$

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P, \quad \text{on}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 10 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

e) $P(n)$ = la matriu associada a g^n en la base canònica de \mathbb{R}^2 és

$$A_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

Demostració: $P(n)$ és cert, $\forall n \geq 1$, per inducció sobre n :

(i) cert per $n = 1$. Matriu associada a $g^1 = g$:

$$\begin{cases} g(1, 0) = (1, -2) \\ g(0, 1) = (-2, 1) \end{cases} \implies M_g = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 + 3 & -1 - 3 \\ -1 - 3 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = M_g.$$

(ii) Si és cert per n , ho és per $n + 1$, $\forall n \geq 1$:

$$g^{n+1} = g^n \circ g \implies M_{g^{n+1}} = M_{g^n} \cdot M_g$$

Per hipòtesi d'inducció (H.I.), $M_{g^n} = A_n$ i abans hem calculat $M_g = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, per tant,

$$\begin{aligned} M_{g^{n+1}} &\stackrel{\text{H.I.}}{=} A_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n - 2[(-1)^n - 3^n] & -2[(-1)^n + 3^n] + (-1)^n - 3^n \\ (-1)^n - 3^n - 2[(-1)^n + 3^n] & -2[(-1)^n - 3^n] + (-1)^n + 3^n \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(-1)^n + 3 \cdot 3^n & -(-1)^n - 3 \cdot 3^n \\ -(-1)^n - 3 \cdot 3^n & -(-1)^n + 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 3^{n+1} & (-1)^{n+1} - 3^{n+1} \\ (-1)^{n+1} - 3^{n+1} & (-1)^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} = A_{n+1}. \end{aligned}$$

La matriu associada a g^{n+1} en la base canònica de \mathbb{R}^2 és A_{n+1} , c.v.d.

1. Sigui

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix}.$$

Determineu una fórmula per A^n , $n \geq 1$, i demostreu-la per inducció. Per a quins valors de $n \geq 1$ és invertible la matriu A^n ?

Solució:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 8i \\ 8 & 4 & 4i \\ 8i & 4i & -4 \end{pmatrix} = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix} = 4A, \end{aligned}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (4A) \cdot A = 4(A \cdot A) = 4(4A) = 4^2 A,$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4^2 A) \cdot A = 4^2(A \cdot A) = 4^2(4A) = 4^3 A,$$

...

$$A^n = 4^{n-1} A.$$

Demostrem per inducció sobre n que la fórmula és certa:

- i) per $n = 1$, $A^1 = 4^{1-1} A = 4^0 A = A$,
- ii) suposem certa per a n , $n \geq 1$ i demostrem que ho és per a $n + 1$,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \stackrel{\text{H.I.}}{=} (4^{n-1} A) \cdot A = 4^{n-1} (A \cdot A) = 4^{n-1} (4A) = 4^n A.$$

La matriu A^n és invertible si, i només si, la matriu A és invertible, ja que:

$$A^n \text{ invertible} \iff (\det(A))^n = \det(A^n) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0 \iff A \text{ invertible.}$$

però, la matriu A no és invertible ja que el determinant de A és 0:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & i^2 \end{vmatrix} = 2i \begin{vmatrix} 2 & 1 & i \\ 2 & 1 & i \\ 2 & 1 & i \end{vmatrix} = 0.$$

Observació: Si A és invertible llavors $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$:

$$A^n \cdot (A^{-1})^n = (A \cdot \dots \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot \dots \cdot A^{-1}) = (A \cdot \overset{(n-1)}{\dots} A) \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot (A^{-1} \cdot \overset{(n-1)}{\dots} A^{-1}) =$$

$$\overset{A \cdot A^{-1} = I_n}{=} (A \cdot \overset{(n-1)}{\dots} A) \cdot I_n \cdot (A^{-1} \cdot \overset{(n-1)}{\dots} A^{-1}) = \dots = I_n \cdot \dots \cdot I_n = I_n.$$

2. Sigui E un \mathbb{K} -espai vectorial de dimensió $n \geq 1$ i f un endomorfisme de E .

- Demostreu que si $\text{Ker } f = \text{Im } f$, la dimensió de E és un nombre parell.
- Pot ser isomorfisme un endomorfisme f tal que $\text{Ker } f = \text{Im } f$? Justifiqueu la resposta.
- Si $f^2 = 0$, quina relació de contingut hi ha entre $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$?

Solució:

- Pel teorema de la dimensió sabem:

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f).$$

Si $\text{Ker } f = \text{Im } f$, llavors $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Im } f) = k$. Per tant $\dim(E) = k + k = 2k$, és a dir, la dimensió de E és un nombre parell.

- Si f és isomorfisme llavors $\text{Im } f = E$, per tant $\dim(E) = \dim(\text{Im } f) = n$. Pel teorema de la dimensió $\dim(\text{Ker } f) = 0$, i obtenim una contradicció: $n = 0$.

- $\forall y \in \text{Im } f$ existeix $x \in E$ tal que $f(x) = y$,

$$f(y) = f(f(x)) = f^2(x) \stackrel{f^2=0}{=} 0 \implies y \in \text{Ker } f,$$

$$\text{Im } f \subseteq \text{Ker } f.$$

3. Considereu el conjunt $E = \{(x, y, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ i l'aplicació $f : E \rightarrow E$ definida per $f(x, y, y, z) = (x + z, y, y, x + y + z)$.

- a) Demostreu que E és un subespai vectorial de \mathbb{R}^4 i calculeu la dimensió i una base de E . Expressen el vector $(x, y, y, z) \in E$ com a combinació lineal dels vectors de la base donada de E . Quines són les coordenades respecte a aquesta base?
- b) Demostreu que f és una aplicació lineal.
- c) Trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.

Solució:

a)

• E és subespai vectorial de \mathbb{R}^4 :

i) $\forall (x, y, y, z), (x', y', y', z') \in E,$

$$(x, y, y, z) + (x', y', y', z') = (x + x', y + y', y + y', z + z') \in E$$

ja que la segona i tercera coordenades són iguals,

ii) $\forall (x, y, y, z) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\lambda(x, y, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda y, \lambda z) \in E,$$

ja que la segona i tercera coordenades són iguals.

• $E = \{(x, y, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \implies \dim(E) = 3,$$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 0, 1),$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base de E .

b) L'aplicació $f(x, y, y, z) = (x + z, y, y, x + y + z)$ és lineal:

i) $\forall (x, y, y, z), (x', y', y', z') \in E,$

$$\begin{aligned} f((x, y, y, z) + (x', y', y', z')) &\stackrel{\text{def.}}{=} f(x + x', y + y', y + y', z + z') = \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} f(x + x' + z + z', y + y', y + y', x + x' + y + y' + z + z') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x + z + x' + z', y + y', y + y', x + y + z + x' + y' + z') = \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} (x + z, y, y, x + y + z) + (x' + z', y', y', x' + y' + z') = \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} f(x, y, y, z) + f(x', y', y', z').
\end{aligned}$$

$$ii) \quad \forall (x, y, y, z) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x, y, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda y, \lambda z) = \\
&\stackrel{\text{def.}}{=} f(\lambda x + \lambda z, \lambda y, \lambda y, \lambda x + \lambda y + \lambda z) = \\
&= \lambda(x + z, y, y, x + y + z) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f(x, y, y, z).
\end{aligned}$$

c)

$$\text{Ker } f = \{(x, y, y, z) \mid f(x, y, y, z) = (0, 0, 0, 0)\},$$

$$f(x, y, y, z) = (0, 0, 0, 0) \iff (x + z, y, y, x + y + z) = (0, 0, 0, 0) \implies$$

$$\implies \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \text{Ker } f = \{(x, 0, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, -1) \rangle, \quad \dim(\text{Ker } f) = 1.$$

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } f) = 3 - 1 = 2.$$

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1 + 0, 0, 0, 1 + 0 + 0) = (1, 0, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ f(e_2) = f(0, 1, 1, 0) = (0 + 0, 1, 1, 0 + 1 + 0) = (0, 1, 1, 1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ f(e_3) = f(0, 0, 0, 1) = (0 + 1, 0, 0, 0 + 0 + 1) = (1, 0, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3. \end{cases}$$

La matriu associada a f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle = \langle e_1 + e_3, e_2 + e_3 \rangle.$$

1. Considerem al conjunt dels nombres enters les relacions binàries següents:

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}b \iff b - a \text{ és parell};$

b) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\mathcal{S}b \iff b - a \text{ és senar}.$

Estudieu les seves propietats. Són relacions d'equivalència? En cas afirmatiu, determineu totes les classes d'equivalència i el conjunt quocient.

Solució:

a) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}b \iff b - a \text{ és parell};$

Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}a$, ja que $a - a = 0$ és parell;

Simètrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}b \iff b - a \text{ és parell} \iff a - b \text{ és parell} \iff b\mathcal{R}a$,

Antisimètrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z},$

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}a \end{cases} \iff \begin{cases} b - a \text{ és parell} \\ a - b \text{ és parell} \end{cases} \not\Rightarrow a = b. \text{ Per exemple } 3\mathcal{R}5 \text{ i } 5\mathcal{R}3, \text{ però } 3 \neq 5.$$

Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z},$

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \\ b\mathcal{R}c \end{cases} \iff \begin{cases} b - a \text{ és parell} \\ c - b \text{ és parell} \end{cases} \implies c - a = (c - b) + (b - a) \text{ és parell per ser suma de parells.}$$

Per tant, la relació \mathcal{R} és una relació d'equivalència. El conjunt quocient \mathbb{Z}/\mathcal{R} està format per dues classes:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0\mathcal{R}x\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 0 = x \text{ és parell}\} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\},$$

és a dir, la classe $\bar{0}$ conté tots els nombres parells.

$$\begin{aligned} \bar{1} &= \{y \in \mathbb{Z} \mid 1\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y - 1 \text{ és parell}\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ és de la forma } 1 + \text{ parell}\} = \\ &= \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}, \end{aligned}$$

és a dir, la classe $\bar{1}$ conté tots els nombres senars.

Tots els enters són parells o senars, per tant, només hi ha aquestes 2 classes d'equivalència:

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\bar{0}, \bar{1}\}.$$

b) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{S}b \iff b - a$ és senar;

Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z}$, no és cert que $a\mathcal{S}a$, ja que $a - a = 0$ no és senar;

Simètrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a\mathcal{S}b \iff b - a$ és senar $\iff a - b$ és senar $\iff b\mathcal{S}a$,

Antisimètrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} a\mathcal{S}b \\ b\mathcal{S}a \end{cases} \iff \begin{cases} b - a \text{ és senar} \\ a - b \text{ és senar} \end{cases} \not\Rightarrow a = b. \text{ Per exemple } 3\mathcal{S}6 \text{ i } 6\mathcal{S}3, \text{ però } 3 \neq 6.$$

Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} a\mathcal{S}b \\ b\mathcal{S}c \end{cases} \iff \begin{cases} b - a \text{ és senar} \\ c - b \text{ és senar} \end{cases} \implies$$

$$\implies c - a = (c - b) + (b - a) \text{ és parell per ser suma de dos nombres senars.}$$

Per tant, la relació \mathcal{S} no és transitiva.

La relació \mathcal{S} és una relació que només compleix la propietat simètrica.

2. Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Trobeu les matrius P i Q d'una PAQ -reducció. Quin és el rang de A ?
- Feu el mateix per la matriu transposada de A .
- Donada una matriu quadrada invertible A de la qual coneixem una PAQ -reducció, expresseu la inversa de A en funció de P i Q .

Solució:

a)

$$\begin{aligned} (A | I_3) &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \equiv_f \\ &\equiv_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - 2f_1 \end{matrix} \equiv_f \\ &\equiv_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 - f_1 \\ 2(f_3 - 2f_1) - (f_2 - f_1) \end{matrix} \equiv_f \end{aligned}$$

$$\equiv_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 \\ \frac{1}{2}(f_2 - f_1) \\ -\frac{1}{8}(2f_3 - 3f_1 - f_2) \end{array}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_c$$

$$\equiv_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 | O) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P \cdot A \cdot Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (I_3 | O). \end{aligned}$$

El rang de la matriu A és 3.

b)

$$P \cdot A \cdot Q = (I_3 | O) \implies (P \cdot A \cdot Q)^t = (I_3 | O)^t \implies Q^t \cdot A^t \cdot P^t = \begin{pmatrix} I_3 \\ O \end{pmatrix},$$

$$P' = Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q' = P^t = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies P' \cdot A^t \cdot Q' = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu A^t és 3.

- c) Si A és una matriu quadrada i invertible, $A \in M(n, \mathbb{K})$, el rang de A és n . Les matrius P i Q d'una PAQ -reducció són invertibles i per tant:

$$P \cdot A \cdot Q = I_n \implies P^{-1} \cdot (P \cdot A \cdot Q) \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} \implies$$

$$\implies (P^{-1} \cdot P) \cdot A \cdot (Q \cdot Q^{-1}) = P^{-1} \cdot Q^{-1} \implies A = P^{-1} \cdot Q^{-1} \implies$$

$$\implies A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = (Q^{-1})^{-1} \cdot (P^{-1})^{-1} = Q \cdot P$$

3. Sigui $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000\}$. Estudieu si les aplicacions següents són injectives, exhaustives o bijectives:

- a) $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $f(A) = X \setminus A$;
 b) $g : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $g(A) = A \setminus Y$, on

$$Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 500\};$$

- c) $h : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Z)$ tal que $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $h(A) = A \cap Z$, on

$$Z = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 200\}.$$

Solució:

- a)
- $$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ A & \longrightarrow & f(A) = X \setminus A \end{array} \quad \text{on } X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 1000\}.$$

En realitat, $X \setminus A$ és el complementari de A en X , és a dir, $f(A) = X \setminus A = A^c$.

f és injectiva: $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$, $f(A) = f(B) \implies A^c = B^c \implies (A^c)^c = (B^c)^c \implies A = B$

f és exhaustiva: $\forall B \in \mathcal{P}(X), \exists A = B^c \in \mathcal{P}(X)$ tal que $f(A) = f(B^c) = (B^c)^c = B$.
Per tant, f és bijectiva.

b)

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ A & \longrightarrow & f(A) = A \setminus Y \end{array} \quad \text{on } Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 500\}.$$

g és injectiva: NO!

$$g(A) = g(B) \implies A \setminus Y = B \setminus Y \not\implies A = B.$$

Per exemple: $A = \{1, 500, 501\}, B = \{1, 501\}, A \neq B$ però $g(A) = g(B) = \{501\}$.

g és exhaustiva: NO!

$$\forall B \in \mathcal{P}(X), \exists A \in \mathcal{P}(X) \text{ tal que } g(A) = A \setminus Y = B?$$

No sempre: $g(A)$ no conté mai elements de Y , per tant,

si $B = \{1\}, \forall A \in \mathcal{P}(X), g(A) = A \setminus Y \not\ni 1$ i no pot ser mai $g(A) = B$.

c)

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Z) \\ A & \longrightarrow & h(A) = A \cap Z \end{array} \quad \text{on } Z = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 200\}.$$

h és injectiva: NO!

$$h(A) = h(B) \implies A \cap Z = B \cap Z \not\implies A = B.$$

Per exemple: $A = \{1, 2, 250\}, B = \{1, 2, 300\}, A \cap Z = B \cap Z = \{1, 2\}$ però $A \neq B$.

g és exhaustiva: SI!

$$\forall B \in \mathcal{P}(Z) \implies \exists A \in \mathcal{P}(X) \text{ tal que } h(A) = A \cap Z = B?$$

Si: donat $B \in \mathcal{P}(Z)$ prenem $A = B$, llavors $h(A) = A \cap Z = B \cap Z = B$, ja que $B \subseteq Z$.

4. Demostreu que la multiplicació ordinària de fraccions és una operació binària interna al conjunt $F = \left\{ \frac{1+2a}{1+2b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Comproveu que (F, \cdot) és un grup abelià. Resoleu l'equació

$$\frac{3}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{11}.$$

Solució:

$$F = \left\{ \frac{1+2a}{1+2b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Observem que els elements de F són fraccions tals que tant el numerador com el denominador son nombres senars, és a dir, fraccions de la forma $\frac{m}{n}$, on m i n ón senars i, per tant, el denominador és diferent de zero.

i) Operació interna en F :

$$x, y \in F \stackrel{?}{\implies} xy \in F$$

$$\begin{aligned} x, y \in F &\implies x = \frac{m}{n}, y = \frac{m'}{n'}, \text{ amb } m, n, m', n' \text{ senars} \implies \\ &\implies xy = \frac{m}{n} \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}, \text{ amb } mm', nn' \text{ senars} \implies xy \in F \end{aligned}$$

ii) (F, \cdot) grup abelià:

• Associativa i commutativa: el producte de fraccions és associatiu i commutatiu, per tant, també ho és el producte de fraccions de F .

• Element neutre: Sigui $x \in F$, l'element neutre és $e \in F$ tal que $xe = x$, $\forall x \in F$, però:

$$\begin{aligned} xe = x &\implies e = 1 = \frac{1}{1} \in F \\ &\implies \text{l'element neutre de } F \text{ és } 1. \end{aligned}$$

• Element invers: $\forall x \in F$, si existeix l'element invers $x' \in F$ tal que $xx' = 1$ ha de ser $x' = \frac{1}{x}$. Però $x \in F \implies x = \frac{m}{n}$ on m i n són senars $\implies x' = \frac{1}{x} = \frac{n}{m}$ on m i n són senars $\implies \frac{n}{m} \in F$ és l'element invers de $x = \frac{m}{n}$.

iii) Resolució de l'equació

$$\frac{3}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{11}.$$

$$\frac{3}{5} \cdot x \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{11} \xrightarrow{\text{commuta.}} x \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{11} \xrightarrow[\text{operació}]{\text{def.}}$$

$$\implies x \cdot \frac{3}{75} = \frac{7}{11} \xrightarrow{\text{invers}} x = \frac{7}{11} \frac{75}{3} = \frac{525}{33} = \frac{175}{11}.$$

1. Demostreu per inducció la fórmula:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Solució:

i) Per $n = 1$:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{1 \cdot 5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{5} \implies \text{cert}$$

ii) Suposem que és cert per n , veurem que també ho és per $n + 1$:

La fórmula per a $n + 1$ és:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{n+1}{4(n+1)+1},$$

és a dir, volem demostrar:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{n+1}{4n+5}.$$

Però:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} \stackrel{\text{H.I.}}{=}$$

$$\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4(n+1)-3)(4(n+1)+1)} = \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} =$$

$$= \frac{n(4n+5)+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{(4n+1)(n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{n+1}{4n+5}.$$

2. Existeix una aplicació lineal de \mathbb{R}^6 en \mathbb{R}^3 amb rang 4 i dimensió del nucli 2? i de rang 2 i dimensió del nucli 4? i de rang 3 i dimensió del nucli 2? Justifiqueu la resposta.

Solució:

La matriu associada a una aplicació lineal f de \mathbb{R}^6 en \mathbb{R}^3 té 6 columnes i 3 files. Sigui A la matriu associada, $A \in M(3, 6, \mathbb{R})$. Per tant,

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im } f) = \text{rang}(A) \leq \min\{3, 6\} = 3.$$

i) No pot existir, ja que $\text{rang}(f) \leq 3$,

ii)

$$\begin{cases} \text{rang}(f) = 2 \leq 3 : \text{és possible,} \\ \dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\text{Im } f) = 6 - 2 = 4 : \text{és possible.} \end{cases}$$

Exemples:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

iii)

$$\begin{cases} \text{rang}(f) = 3 \leq 3 : \text{és possible,} \\ 2 = \dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\text{Im } f) = 6 - 3 = 3 : \text{no pot ser.} \end{cases}$$

3. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de l'espai vectorial E i $f : E \rightarrow E$ l'endomorfisme que compleix $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_3$ i $\text{Ker } f = \langle 2e_1 - e_2 + e_3 \rangle$.

a) Calculeu la matriu associada a f respecte a la base \mathcal{B} .

b) Calculeu la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_1 = \{e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2 - e_1\}$.

Solució:

a) Sigui A la matriu associada a f respecte a la base \mathcal{B} :

$$2e_1 - e_2 + e_3 \in \text{Ker } f \implies$$

$$\implies f(2e_1 - e_2 + e_3) = 0_E \xrightarrow{f \text{ lineal}} 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = 0_E \implies$$

$$\implies f(e_3) = -2f(e_1) + f(e_2) \begin{matrix} f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -2e_1 + 3e_3 \end{matrix} \implies -2(e_1 - 2e_2 + e_3) + (-2e_1 + 3e_3) \implies$$

$$\implies f(e_3) = -4e_1 + 4e_2 + e_3.$$

Per tant,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Sigui B la matriu associada a f respecte a la base $\mathcal{B}_1 = \{e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2 - e_1\}$.

$$\begin{array}{ccc} E_{\text{base } \mathcal{B}} & \xrightarrow[A]{} & E_{\text{base } \mathcal{B}} \\ Id \uparrow P & & P^{-1} \downarrow Id \\ E_{\text{base } \mathcal{B}_1} & \xrightarrow[f]{} & E_{\text{base } \mathcal{B}_1} \end{array}$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P, \text{ on}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Càlcul de la matriu inversa de P :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B = P^{-1} \cdot A \cdot P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Per a cada $a \in \mathbb{R}$ definim l'aplicació lineal f_a de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 :

$$f_a(x, y, z) = (ax - y, ay - z, az - x).$$

- Trobeu la matriu associada a f_a en la base canònica de \mathbb{R}^3 . Doneu una base i la dimensió de $\text{Ker } f_a$ i $\text{Im } f_a$.
- Per quins valors de a és f bijectiva? Trobeu la matriu associada a l'aplicació lineal f_a^{-1} per aquests valors.
- Calculeu $f_1(1, 2, 3)$ i $f_1^{-1}(f_1(1, 2, 3))$.
- És \mathbb{R}^3 suma directa de $\text{Ker } f_1$ i $\text{Im } f_1$?

Solució:

- Sigui M_{f_a} la matriu associada a f_a en la base canònica de \mathbb{R}^3 . Hem de trobar una base i la dimensió de $\text{Ker } f_a$ i $\text{Im } f_a$:

Amb la definició de f_a obtenim:

$$\begin{cases} f_a(1, 0, 0) = (a, 0, -1) \\ f_a(0, 1, 0) = (-1, a, 0) \\ f_a(0, 0, 1) = (0, -1, a) \end{cases} \implies M_{f_a} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

• $\dim(\text{Im } f_a)$:

$$\dim(\text{Im } f_a) = \text{rg}(M_{f_a}) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & a & -1 \\ 0 & -1 & a^2 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & a^3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^3 = 1 & \text{rg}(M_{f_a}) = 2 \\ a^3 \neq 1 & \text{rg}(M_{f_a}) = 3 \end{cases} \xrightarrow{a^3=1 \iff a=1} \begin{cases} a = 1 & \dim(\text{Im } f_1) = 2 \\ a \neq 1 & \dim(\text{Im } f_a) = 3. \end{cases}$$

• Base de $\text{Im } f_a$:

Si $a \neq 1$: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ja que $\dim(\text{Im } f_a) = 3 \implies \text{Im } f_a = \mathbb{R}^3$

Si $a = 1$: prenem 2 columnes linealment independents, per exemple, la primera i la segona:

Base de $\text{Im } f_a$: $\{(1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$.

• $\dim(\text{Ker } f_a)$:

$$\dim(\text{Ker } f_a) = 3 - \dim(\text{Im } f_a) = \begin{cases} 3 - 3 = 0, & \text{si } a \neq 1 \\ 3 - 2 = 1, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

• Base de $\text{Ker } f_a$:

Si $a \neq 1$: no admet base ja que $\dim(\text{Ker } f_a) = 0 \implies \text{Ker } f_a = \{(0, 0, 0)\}$.

Si $a = 1$: $\dim(\text{Ker } f_a) = 1$, i trobem una base resolent el sistema:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \\ &\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{Ker } f_1 = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$.

Base de $\text{Ker } f_1$: $\{(1, 1, 1)\}$.

b) Per ser $f_a \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, f_a bijectiva $\iff \text{rg}(f_a) = 3 \iff a \neq 1$.

Matriu associada a f_a^{-1} en aquest cas:

$$\begin{aligned} M_{f_a^{-1}} &= (M_{f_a})^{-1} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{a^3 - 1} \begin{pmatrix} a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{a^3 - 1} \begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) $f_1(1, 2, 3)$:

$$f_1(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$f_1^{-1}(f_1(1, 2, 3)) = f_1^{-1}(-1, -1, 2)$: Resolem el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = -2 + z \\ y = -1 + z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f_1^{-1}(f_1(1, 2, 3)) = \{(-2 + z, -1 + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-2, -1, 0) + (z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = (-2, -1, 0) + \langle (1, 1, 1) \rangle .$$

d) $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f_1 \oplus \text{Im } f_1$?

$$\text{Ker } f_1 = \langle (1, 1, 1) \rangle, \quad \text{Im } f_1 = \langle (1, 0, -1), (-1, 1, 0) \rangle$$

$\text{Ker } f_1 + \text{Im } f_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \dim(\text{Ker } f_1 + \text{Im } f_1) = 3 \implies \text{Ker } f_1 + \text{Im } f_1 = \mathbb{R}^3 \\ \dim(\text{Ker } f_1 \cap \text{Im } f_1) = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \mathbb{R}^3 = \text{Ker } f_1 \oplus \text{Im } f_1 .$$

1. Demostreu per inducció la fórmula:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \quad \forall n \geq 1.$$

Solució:

i) Per $n = 1$ és cert:

$$1 \cdot 3 = 3, \quad \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 7)}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

ii) Si és cert per $n - 1$, és cert per n : hem de demostrar que

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (n-1)(n-1+2) = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+7)}{6} \implies$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

En efecte,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) =$$

$$= [1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + (n-1)(n-1+2)] + n(n+2) \stackrel{\text{H.I.}}{=}.$$

$$\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+7)}{6} + n(n+2) = \frac{(n-1)n(2n+5) + 6n(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{n(2n^2 + 9n + 7)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

2. Sigui f l'endomorfisme de \mathbb{R}^4 tal que $f(a, b, c, d) = (b, 2c, 3d, 0)$.

- Trobeu la matriu associada respecte a la base canònica.
- Calculeu bases i dimensions de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.
- Demostreu que $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ és una base i trobeu les coordenades de $(1, 3, 3, 1)$ respecte a \mathcal{B} .
- Determineu la matriu associada a f respecte a la base \mathcal{B} .

Solució:

- Matriu associada respecte a la base canònica:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= (0, 0, 0, 0) \\ f(0, 1, 0, 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ f(0, 0, 1, 0) &= (0, 2, 0, 0) \\ f(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 3, 0) \end{aligned} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bases i dimensions de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$:

- $\text{Ker } f$:

$$\text{Ker } f = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x, 0, 0, 0), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{matrix} y = 0 \\ 2z = 0 \\ 3t = 0 \end{matrix} \implies \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{matrix}$$

$$\dim(\text{Ker } f) = 1.$$

- $\text{Im } f$:

$$\text{Im } f = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 3, 0) \rangle$$

Aquest vectors són linealment independents i per tant són una base de $\text{Im } f$.

$$\dim(\text{Im } f) = 3.$$

c) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ és una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Els vectors fila de la matriu anterior són linealment independents i per tant, \mathcal{B} és una base de \mathbb{R}^4 .

Coordenades de $(1, 3, 3, 1)$ respecte a \mathcal{B} :

$$(1, 3, 3, 1) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(1, 1, 0, 0) + \gamma(1, 2, 1, 0) + \delta(0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha + \beta + \gamma = 1 & & \alpha = 1 \\ \beta + 2\gamma = 3 & \implies & \beta = -3 \\ \gamma = 3 & & \gamma = 3 \\ \delta = 1 & & \delta = 1 \end{array}$$

Per tant, les coordenades de $(1, 3, 3, 1)$ respecte a \mathcal{B} són: $(1, -3, 3, 1)$.

d) Matriu associada a f respecte a la base \mathcal{B} : per \mathcal{B}_c indiquem la base canònica de \mathbb{R}^4

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4_{\text{base } \mathcal{B}_c} & \xrightarrow[A]{} & \mathbb{R}^4_{\text{base } \mathcal{B}_c} \\ Id \uparrow P & & P^{-1} \downarrow Id \\ \mathbb{R}^4_{\text{base } \mathcal{B}} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R}^4_{\text{base } \mathcal{B}} \end{array}$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B = P^{-1} \cdot A \cdot P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Demostreu per inducció que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, per a tot $n \geq 1$.

Solució:

i) Per $n = 1$ és evident:

$$\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$$

ii) Suposem que és cert per a n i demostrem-ho per a $n + 1$, és a dir:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \implies \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Aleshores, aplicant la hipòtesi d'inducció,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{H.I.}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Per tant, n'hi ha prou amb provar que

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

En efecte:

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \iff \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} \leq \frac{1}{n} \iff$$

$$\text{multipliquen per } n(n+1)^2 \iff n + n(n+1) \leq (n+1)^2 \iff 0 \leq 1.$$

2. Siguin A, B dos conjunts no buits i sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Indiquem per \sim_f la relació sobre A definida per

$$xRy \iff f(x) = f(y)$$

- a) Proveu que R és una relació d'equivalència.
 b) Calculeu el nombre de classes d'equivalència per la relació R si f és l'aplicació de \mathbb{Z} en $\{-1, 0, 1\}$ donada de la manera següent:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0; \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Solució:

- a) R és d'equivalència per les propietats de reflexivitat, simetria i transitivitat de la relació d'igualtat.
 b) Veiem que $\mathbb{Z}/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \overline{-1}\}$.

En efecte: si $x \in \mathbb{Z}$, aleshores $xR0 \iff f(x) = 0 \iff x = 0$.

Per tant, $\bar{0} = \{0\}$. Així mateix,

$$xR1 \iff f(x) = \frac{x}{|x|} = 1 \iff x = |x| \iff x > 0$$

de manera que $\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

Finalment,

$$xR(-1) \iff f(x) = \frac{x}{|x|} = -1 \iff x = -|x| \iff x < 0$$

és a dir, $\overline{-1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

Per tant, R determina 3 classes d'equivalència.

3. Discutiu segons els valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ el sistema següent:

$$\begin{aligned} 3x + 5y + az &= 2 \\ 5x + 3y + az &= 2 \\ ax + 5y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Solució:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 2 \\ 5 & 3 & a & 2 \\ a & 5 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 2 \\ 0 & -16 & -2a & -4 \\ 0 & 15-5a & 9-a^2 & 6-2a \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ 3f_2 - 5f_1 \\ 3f_3 - af_2 \end{matrix} \\ &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 2 \\ 0 & 8 & a & 2 \\ 0 & 5(3-a) & (3+a)(3-a) & 2(3-a) \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ -\frac{1}{2}(3f_2 - 5f_1) \\ 3f_3 - af_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

• Si $3 - a = 0$, és a dir, si $a = 3$ tenim el sistema següent:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} \frac{1}{3}(g_1 - g_2) \\ g_2 \end{matrix} \implies \\ \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ 8y + 3z = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = y \\ y = \frac{2-3z}{8} \end{cases} \implies x = y = \frac{2-3z}{8}, \text{ S. C. I.} \end{aligned}$$

• Si $a \neq 3$, dividim l'última fila per $3 - a$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 2 \\ 0 & 8 & a & 2 \\ 0 & 5(3-a) & (3+a)(3-a) & 2(3-a) \end{array} \right) \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{matrix} &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 2 \\ 0 & 8 & a & 2 \\ 0 & 5 & 3+a & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{matrix} \\ &\equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & a & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} h_1 - h_2 \\ h_2 \\ h_3 - h_2 \end{matrix} \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \frac{1}{3}(h_1 - h_2) \\ h_2 \\ \frac{1}{3}(h_3 - h_2) \end{matrix} \implies \\ \implies \begin{cases} x = y \\ 8y + az = 2 \\ y = z \end{cases} &\implies \begin{cases} x = y = z \\ (8+a)z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Si $a \neq -8$, el sistema és compatible i determinat i les solucions són:

$$x = y = z = \frac{2}{8+a}.$$

b) Si $a = -8$, el sistema és incompatible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv_f \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La segona fila és una equació impossible.

Resum:

- Si $a \neq -8, 3 \implies$ S. C. D. amb la solució: $x = y = z = \frac{2}{8+a}$.
- Si $a = -8 \implies$ S. I.
- Si $a = 3 \implies$ S. C. I. amb la solució: $x = y = \frac{2-3z}{8}$.

4. Descomposeu la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

en suma de una matriu simètrica i una matriu antisimètrica. Justifiqueu la resposta.

Solució:

Si A és una matriu quadrada sempre es pot descomposar en suma de una matriu simètrica i una matriu antisimètrica, concretament:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

La matriu $\frac{A+A^t}{2}$ és simètrica:

$$\left(\frac{A + A^t}{2}\right)^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{A + A^t}{2}$$

La matriu $\frac{A-A^t}{2}$ és antisimètrica:

$$\left(\frac{A - A^t}{2}\right)^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{A - A^t}{2}$$

Òbviament:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}.$$

Per a la matriu A donada:

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A - A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En el conjunt $M(n, \mathbb{R})$ definim la relació següent:

$$\forall A, B \in M(n, \mathbb{R}) \quad A \mathcal{R} B \iff \exists P \in M(n, \mathbb{R}), P \text{ invertible tal que } B = P \cdot A \cdot P^{-1}.$$

- Proveu que \mathcal{R} és una relació d'equivalència.
- Si $A \mathcal{R} B$, proveu que A és invertible si, i només si, B és invertible.
- Si $A \mathcal{R} B$, quina relació hi ha entre els determinants de les matrius?

Solució:

- Reflexiva: $\forall A \in M(n, \mathbb{R})$, A es pot escriure com $A = I_n \cdot A \cdot I_n^{-1}$. Per tant $A \mathcal{R} A$.
 - Simètrica: $\forall A, B \in M(n, \mathbb{R})$,

$$A \mathcal{R} B \iff \exists P \text{ invertible tal que } B = P \cdot A \cdot P^{-1} \iff^*$$

$$\iff^* \exists P^{-1} \text{ invertible tal que } A = P^{-1} \cdot B \cdot (P^{-1})^{-1} \iff B \mathcal{R} A$$

$$(*) \begin{cases} B = P \cdot A \cdot P^{-1} \iff P^{-1} \cdot B = P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \iff P^{-1} \cdot B \cdot P = A \cdot P^{-1} \cdot P, \\ P = (P^{-1})^{-1}, \\ P \text{ invertible} \Rightarrow \exists P^{-1} \text{ tal que } P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = I_n \Rightarrow P^{-1} \text{ invertible.} \end{cases}$$

- Transitiva: $\forall A, B, C \in M(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{cases} A \mathcal{R} B \\ B \mathcal{R} C \end{cases} \implies \begin{cases} \exists P \text{ invertible tal que } B = P \cdot A \cdot P^{-1} \\ \exists Q \text{ invertible tal que } C = Q \cdot B \cdot Q^{-1} \end{cases} \implies$$

$$\implies \exists P, Q \text{ invertibles tal que } C = Q \cdot (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot Q^{-1} = (Q \cdot P) \cdot A \cdot (P^{-1} \cdot Q^{-1}).$$

Per tant, $C = (Q \cdot P) \cdot A \cdot (Q \cdot P)^{-1}$, és a dir, $A \mathcal{R} C$.

b)

$$ARB \implies \exists P \text{ invertible tal que } B = P \cdot A \cdot P^{-1} \text{ i } A = P^{-1} \cdot B \cdot P$$

Si A invertible, $\exists A^{-1}$ i llavors $B^{-1} = (P \cdot A \cdot P^{-1})^{-1} = P \cdot A^{-1} \cdot P^{-1} \implies B$ és invertible.

Si B invertible, $\exists B^{-1}$ i llavors $A^{-1} = (P^{-1} \cdot B \cdot P)^{-1} = P^{-1} \cdot B^{-1} \cdot P \implies A$ és invertible.

c)

$$ARB \implies \exists P \text{ invertible tal que } B = P \cdot A \cdot P^{-1} \implies$$

$$\implies \det(B) = \det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A)\frac{1}{\det(P)} = \det(A).$$

Per tant, les matrius A i B tenen el mateix determinant.

2. Sigui $\mathcal{D}_n = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A \text{ és diagonal i invertible}\}$. Definim l'operació binària següent:

$$\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$$

$$(A, B) \longrightarrow A \cdot B$$

on $A \cdot B$ és el producte de matrius.

- Proveu que l'operació és interna, és a dir, està ben definida.
- Proveu que (\mathcal{D}_n, \cdot) és un grup abelià.
- En el conjunt \mathcal{D}_3 calculeu les matrius inverses de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Solució:

- Si $A, B \in \mathcal{D}_n$ aleshores

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n$$

La matriu $A \cdot B$ és diagonal i també és invertible, ja que

$$a_i \neq 0 \text{ i } b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n \implies a_i b_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

b)

- Associativa: el producte de matrius sempre és associatiu.
- Element neutre: La matriu $I_n \in \mathcal{D}_n$ i compleix que:

$$\forall A \in \mathcal{D}_n, A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

- Element invers: $\forall A \in \mathcal{D}_n$, si

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

aleshores $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Per tant,

$$\exists \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n,$$

ja que

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

- Commutativa: $\forall A, B \in \mathcal{D}_n$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

c) Amb la fórmula de l'element invers, calculem les matrius inverses. Les inverses de les matrius són:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sigui F el subespai de $M(2, \mathbb{R})$ generat per les matrius:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i sigui $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a + b - c = 0 \right\}$.

- a) Demostrar que G és un subespai de $M(2, \mathbb{R})$.
 b) Calcular la dimensió i una base dels subespais F , G , $F + G$ i $F \cap G$.

Solució:

a) Siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in G$. Aleshores,

$$\lambda A + \mu A' = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix} \in G,$$

ja que

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in G \end{array} \right\} \implies \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a' + b' - c' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda a + \lambda b - \lambda c = 0 \\ \mu a' + \mu b' - \mu c' = 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') - (\lambda c + \mu c') = 0.$$

b)

• F :

Sigui $\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canònica de $M(2, \mathbb{R})$.

Les matrius v_1, v_2 són linealment independents: les seves coordenades en la base \mathcal{B}_c de $M(2, \mathbb{R})$ són $v_1 = (0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$. Aquest vectors són linealment independents, ja que formen una matriu de rang 2:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Per tant, $\dim(F) = 2$ i una base de F és $\{v_1, v_2\}$.

- G : $a + b - c = 0$, és a dir, $c = a + b$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a + b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ a + b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \\ \implies G &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Les matrius $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ són de G i generen G . Les seves coordenades en la base canònica de $M(2, \mathbb{R})$ són $w_1 = (1, 0, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 0, 1)$. Aquest vectors són linealment independents, ja que formen una matriu de rang 3:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Per tant, $\dim(G) = 3$ i una base de G és $\{w_1, w_2, w_3\}$.

- $F + G$: El subespai $F + G$ està generat per les bases de F i de G :

$$F + G = \langle v_1, v_2, w_1, w_2, w_3 \rangle.$$

Per a calcular una base de $F + G$, trobem els vectors linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_1 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_1 \\ w_1 - v_2 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_1 \\ w_2 - v_1 \\ w_3 \\ w_1 - v_2 \end{matrix}$$

El rang d'aquesta matriu és 4 i, per tant, $\dim(F + G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Donat que F i G són subespais de \mathbb{R}^4 , aleshores $F + G = \mathbb{R}^4$. Una base de $F + G$ és:

$$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\},$$

o també pot ser la base canònica de \mathbb{R}^4 .

• $F \cap G$: Per la fórmula de Grassmann, tenim:

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \implies$$

$$\implies \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 2 + 3 - 4 = 1.$$

En el càlcul anterior, $w_1 - v_2 = (0, 0, 0, 0)$, és a dir, $w_1 = v_2$. Donat que w_1 és de G i v_2 és de F ,

$$F \cap G = \langle v_2 \rangle = \langle w_1 \rangle = \langle (1, 0, 1, 0) \rangle.$$

4. Sigui $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ l'aplicació donada per $p(x) \rightarrow p'(x)$, per a tot $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ ($\mathbb{R}_n[x]$ indica l'espai vectorial dels polinomis de grau $\leq n$ amb coeficients a \mathbb{R}).

- Provar que f és lineal.
- Trobar una base i la dimensió de $\text{Ker } f$ i $\text{Im } f$.
- Calcular la matriu associada a f en les bases $\{1, x, x^2\}$ i $\{1, 1 + x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathbb{R}_1[x]$ respectivament.
- Calcular les coordenades de $f(1 + 2x + x^2)$ en la base $\{1, 1 + x\}$.

Solució:

a) $\forall p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, $f(p(x)) = p'(x)$, on $p'(x)$ és la derivada del polinomi $p(x)$.

Si $p(x) = a + bx + cx^2$, llavors $f(p(x)) = (a + bx + cx^2)' = b + 2cx$.

Demostrem que f és lineal: $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x)) \\ f(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda f(p(x)) \end{cases}$$

Per tant, f és una aplicació lineal.

b)

• Ker f :

$$\text{Ker } f = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid f(p(x)) = 0 + 0x\},$$

$$a + bx + cx^2 \in \text{Ker } f \iff f(a + bx + cx^2) = 0 + 0x \implies b + 2cx = 0 + 0x \implies \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } f = \{a + 0x + 0x^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle 1 + 0x + 0x^2 \rangle = \langle 1 \rangle.$$

En particular, $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

• Im f :

Teorema de la dimensió: $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$. Per tant,

$$\dim(\text{Im } f) = 3 - 1 = 2.$$

Sigui $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la base canònica de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathcal{B}' = \{1, x\}$ la base canònica de $\mathbb{R}_1[x]$.

Im f està generat per les imatges dels vectors de la base:

$$\text{Im } f = \langle f(1), f(x), f(x^2) \rangle = \langle 0, 1, 2x \rangle = \langle 1, 2x \rangle.$$

Les coordenades dels vectors $v_1 = 1 + 0x$, $v_2 = 0 + 2x$ respecte de la base \mathcal{B}' de $\mathbb{R}_1[x]$ són: $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 2)$.

Els vectors v_1, v_2 són linealment independents, ja que la matriu següent té rang 2:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Per tant, $\{v_1, v_2\} = \{1, 2x\}$ és una base de Im f .

c) Calculem la matriu associada a f respecte de les bases: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathcal{B}'_1 = \{1, 1 + x\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$.

$$\begin{cases} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) \implies f(1) = (0, 0), \\ f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) \implies f(1) = (1, 0), \\ f(x^2) = 2x = (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) \implies f(1) = (-2, 2), \end{cases} \implies$$
$$\implies M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Calculem $f(1 + 2x + x^2)$ en la base \mathcal{B}'_1 :

$$f(1 + 2x + x^2) = M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}'_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Per tant, $f(1 + 2x + x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) = 2 + 2x$.

1. Demostreu que la fórmula següent es satisfà per a tot $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Solució:

Per inducció sobre n :

i) Per $n = 1$:

$$1^3 = 1, \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1, \text{ cert}$$

ii) Suposem cert per a n i demostrem per a $n+1$, és a dir, suposem que la fórmula

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ és certa}$$

i demostem la fórmula següent:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

En efecte:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4n + 4]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

2. Definim $h_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ per $h_\alpha(x, y, z) = (\alpha x, y + \alpha z, x - 2\alpha z)$ per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Determineu la matriu de h_α respecte a la base canònica de \mathbb{R}^3 .
- Calculeu bases i dimensions de $\text{Ker } h_\alpha$ i $\text{Im } h_\alpha$ segons els valors de α .
- Per a quins valors de α és h_α bijectiva? Per aquests valors calculeu la matriu de h_α^{-1} en la base canònica de \mathbb{R}^3 .
- Calculeu la matriu de h_α en la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, essent $e_1 = (0, -1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 2)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.
- Determineu la antiimatge per h_α del subespai generat pel vector $e = 2e_1 - e_2 + e_3$.

Solució:

a) Matriu de h_α en la base canònica:

$$\begin{cases} h_\alpha(1, 0, 0) = (\alpha, 0, 1) \\ h_\alpha(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \\ h_\alpha(0, 0, 1) = (0, \alpha, -2\alpha) \end{cases} \implies M_{h_\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

b)

$$\dim(\text{Im } h_\alpha) = \text{rang}(M_{h_\alpha}) = \begin{cases} 2, & \text{si } \alpha = 0 \\ 3, & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases} \text{ ja que } \det(M_{h_\alpha}) = -2\alpha^2.$$

Base de $\text{Im } h_\alpha$:

Si $\alpha \neq 0$: base canònica ja que $\text{Im } h_\alpha = \mathbb{R}^3$,

Si $\alpha = 0$: $\langle h_0(1, 0, 0), h_0(0, 1, 0) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

$$\dim(\text{Ker } h_\alpha) = 3 - \dim(\text{Im } h_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = 0 \\ 0, & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, una base de $\text{Ker } h_0$ és $\{(0, 0, 1)\}$ ja que:

$$M_{h_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

c)

$$h_\alpha \text{ injectiva} \iff h_\alpha \text{ exhaustiva} \iff \text{rang}(M_{h_\alpha}) = 3 \iff \alpha \neq 0$$

Matriu de h_α^{-1} en la base canònica:

$$\begin{aligned} M_{h_\alpha^{-1}} &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2\alpha^2} \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha & 1 \\ 0 & -2\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2\alpha} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\alpha^2} & 0 & \frac{-1}{2\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Escrivim $\mathcal{B}_c = \{u_1, u_2, u_3\}$ per a indicar la base canònica de \mathbb{R}^3 , i $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la nova base. Volem calcular $M_{h_\alpha}(\mathcal{B})$:

La matriu de canvi de base de la base \mathcal{B} a la base canònica \mathcal{B}_c és:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} M_{h_\alpha}(\mathcal{B}) &= P^{-1} \cdot M_{h_\alpha}(\mathcal{B}_c) \cdot P = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -4\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 2\alpha & 1 \\ 0 & -4\alpha & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & \alpha - 1 \\ 0 & -2\alpha & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) Resolem el sistema

$$M_{h_\alpha}(\mathcal{B}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2\alpha y + (\alpha - 1)z & = & 2 \\ -2\alpha y + \frac{1}{2}z & = & -1 \\ \alpha z & = & 1 \end{array} \implies$$

$$\implies z = \frac{1}{\alpha}, \quad y = \frac{2\alpha + 1}{4\alpha^2}, \quad x = \frac{4\alpha + 3}{2\alpha}$$

Per tant,

$$h_\alpha^{-1}(\langle 2e_1 - e_2 + e_3 \rangle) = \left\langle \frac{4\alpha + 3}{2\alpha}e_1 + \frac{2\alpha + 1}{4\alpha^2}e_2 + \frac{1}{\alpha}e_3 \right\rangle.$$

Bibliografia

Referències bàsiques:

- [1] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra lineal i geometria*, Publicacions de la UAB, Barcelona, 1990.
- [2] E. Espada Bros, *Problemas resueltos de álgebra* (Tomo I y II), Ed. Edunsa, 1986.
- [3] J.L. García Lapresta et Alt, *Tests de Álgebra Lineal*, Editorial AC, 1992.
- [4] I.N. Herstein, D.J. Winter, *Álgebra Lineal y Teoría de Matrices*, Grupo Editorial Iberoamérica.
- [5] J.M. Moreno, *Una introducción al álgebra lineal elemental (2a edició)*, Publicaciones de la UAB, Barcelona, 1990.

Referències complementàries:

- [6] I.S. Grossman, *Aplicaciones de álgebra lineal*, Ed. Iberoamérica, 1992.
- [7] S. Lang, *Introducción al álgebra lineal*, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- [8] A. Rojo, *Álgebra Lineal*, Ed. Editorial AC, Madrid, 1992.
- [9] S.R. Searle, *Matrix algebra useful for statistics*, Ed. John Wiley & Sons, 1982
- [10] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich International Edition, 1988.

